

PROGRAMA LECOP Y EL LENGUAJE CIENTÍFICO DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Andres Avelino Camara Acero
Raynaldo Rodríguez Julca
Judith Esther Gavidia Medrano
Romer Juvenal Javier Quijano



NOVO MUNDO

Andrés Avelino Cámara Acero

Correo: acamara@unheval.edu.pe

Perfil: Doctor en Ciencias de la Educación, Magister en Gestión y Planeamiento Educativo, Licenciado en Ciencias de la Educación con especialidad en Matemática y Física.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0624-0764>

Afiliación: Universidad Nacional Hermilio Valdizán.

Raynaldo Rodríguez Julca

Correo: rroodriguez@unheval.edu.pe

Perfil: Doctor en Ciencias de la Educación, Magister en Investigación y Docencia Superior, Licenciado en Ciencias de la Educación con especialidad en Matemática y Física.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5520-2697>

Afiliación: Universidad Nacional Hermilio Valdizán.

Judith Esther Gavidia Medrano

Correo: jgavidia@unheval.edu.pe

Perfil: Doctora en Ciencias de la Educación, Magister en Ciencias de la Educación con mención en Investigación y Docencia Superior, Bachiller en Educación.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1568-3655>

Afiliación: Universidad Nacional Hermilio Valdizán.

Romer Juvenal Javier Quijano

Correo: rjavier@unheval.edu.pe

Perfil: Magister en Ciencias de la Educación con mención en Investigación y Docencia Superior, Licenciado en Ciencias de la Educación con especialidad en Matemática y Física.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7229-7858>

Afiliación: Universidad Nacional Hermilio Valdizán.

PROGRAMA LECOP Y EL LENGUAJE CIENTÍFICO
DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES
UNIVERSITARIOS

Andrés Avelino Cámara Acero

Raynaldo Rodríguez Julca

Judith Esther Gavidia Medrano

Romer Juvenal Javier Quijano



NOVO MUNDO

Todas nuestras publicaciones son sometidas a revisión doble-ciego de pares externos (*Peer Review Double Blinded*).

Esta publicación cuenta con licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial - SinObraDerivada 3.0 Unported License.



ISBN: 978-9942-694-09-6

© Andrés Avelino Cámara Acero
© Raynaldo Rodríguez Julca
© Judith Esther Gavidia Medrano
© Romer Juvenal Javier Quijano

2025

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16122958>

© Editorial Novo Mundo

Guayaquil, Ecuador.

www.editorialnovomundo.com

Queda prohibida la reproducción bajo cualquier modalidad de toda o una parte de esta obra sin autorización expresa del titular de los derechos.

Diseño de carátula y composición: Editorial Novo Mundo

Edición electrónica: Editorial Novo Mundo

Editado en Ecuador/ *Published in Ecuador*

PROGRAMA LECOP Y EL LENGUAJE CIENTÍFICO
DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES
UNIVERSITARIOS

Andrés Avelino Cámara Acero

Raynaldo Rodríguez Julca

Judith Esther Gavidia Medrano

Romer Juvenal Javier Quijano



NOVO MUNDO

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS	9
ÍNDICE DE FIGURAS.....	11
INTRODUCCIÓN.....	12

CAPÍTULO I

LA SEMIÓTICA DEL DISCURSO MATEMÁTICO: EPISTEMOLOGÍA, COGNICIÓN Y DESAFÍOS EN EL CONTEXTO UNIVERSITARIO.....	17
1.1. Más allá de los números, la matemática como lenguaje	17
1.1.1. Conceptualización de la matemática como un sistema semiótico: Sintaxis, semántica y pragmática.....	20
1.1.2. El discurso matemático vs. el lenguaje natural: Un análisis de las brechas y los puentes cognitivos.....	24

1.2. Barreras epistemológicas y afectivas en el aprendizaje de las matemáticas superiores.....	27
1.3. El Lenguaje matemático en las disciplinas universitarias.....	29

CAPÍTULO II

EL PROGRAMA LECOP: UN MODELO PEDAGÓGICO PARA LA TRADUCCIÓN Y COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE CIENTÍFICO-MATEMÁTICO

35

2.1. Fundamentos y principios del Programa LECOP (Lectura y Escritura para la Comprensión de Problemas)	35
2.1.1. Bases teóricas	37
2.1.2. El ciclo LECOP.....	39
2.2. Estrategias y herramientas metodológicas del modelo LECOP	42
2.2.1. Fase de Lectura Crítica.....	44
2.2.2. Fase de Traducción Lingüística.....	47
2.2.3. Fase de Escritura Explicativa.....	49
2.3. El rol del docente como mediador semiótico	52

CAPÍTULO III

IMPACTO, EVIDENCIAS Y PROYECCIONES: LA HUMANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.....

57

3.1. Análisis del impacto del programa LECOP en el desempeño y la actitud estudiantil	57
3.1.1. Evidencias cualitativas: Estudios de caso, análisis del discurso en las producciones escritas de los estudiantes y grupos focales....	59

3.1.2. Evidencias cuantitativas: Medición del rendimiento académico y de la variación en los niveles de ansiedad matemática	62
3.2. Más allá de la resolución de problemas: El desarrollo de competencias transversales	65
3.2.1. El fortalecimiento del pensamiento crítico, la capacidad de argumentación y la resolución de problemas complejos	66
3.2.2. La influencia del modelo en la autoeficacia y la subjetividad del aprendiz: De “incapaz” a “agente de conocimiento”	69
3.3. Proyecciones: Hacia una cultura de la comprensión en la educación científica	71

CAPÍTULO IV

PROGRAMA LECOP PARA MEJORAR EL LENGUAJE CIENTÍFICO DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES. 75

4.1. Introducción	75
4.2. Aspectos metodológicos	78
4.3. Hallazgos	80
4.3.1. Resultados de la Preprueba: Línea Base de Conocimiento ...	81
4.3.2. Resultados de la Posprueba: Evidencia del Cambio	85
4.3.3. Análisis Comparativo de Estadígrafos y Prueba de Hipótesis	89
4.4. Discusión y conclusiones	90

REFLEXIONES FINALES..... 94

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 99

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Desglose de las Dimensiones Semióticas (Sintaxis, Semántica y Pragmática) del Lenguaje Matemático desde el Enfoque Ontosemiótico	23
Tabla 2 Manifestación del Lenguaje Matemático como Componente Esencial en Diversas Disciplinas Universitarias	32
Tabla 3 Estrategias Prácticas de Andamiaje para el Docente como Mediador Semiótico	55
Tabla 4 Ejemplo de Presentación de Resultados Cuantitativos del Impacto del Programa LECOP (Pretest-Postest con Grupo de Control).....	64
Tabla 5 Resultados de la preprueba respecto a las unidades de base de los grupos control y experimental.....	81
Tabla 6 Resultados de la preprueba respecto a las unidades suplementarias de los grupos control y experimental.	83
Tabla 7 Resultados de la preprueba respecto a las unidades derivadas de los grupos control y experimental.....	84
Tabla 8 Resultados de la posprueba respecto a las unidades de base de los grupos control y experimental.....	86

Tabla 9 Resultados de la posprueba respecto a las unidades suplementarias de los grupos control y experimental	87
Tabla 10 Resultados de la posprueba respecto a las unidades derivadas de los grupos control y experimental.	88
Tabla 11 Análisis descriptivo de los estadígrafos en los grupos experimental y control según resultados de la preprueba y postprueba.	89

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Diagrama del Ciclo Metodológico LECOP. Fuente: Elaboración propia	41
Figura 2 Preprueba Respecto a las Unidades de Base Grupo Experimental y Control.....	82
Figura 3 Preprueba Respecto a las Unidades Suplementarias Grupo Experimental y Control.....	83
Figura 4 Preprueba Respecto a las Unidades Derivadas Grupo Experimental y Control.....	85
Figura 5 Posprueba Respecto a las Unidades de Base Grupo Experimental y Control.....	86
Figura 6 Posprueba Respecto a las Unidades Suplementarias Grupo Experimental y Control.....	87
Figura 7 Posprueba Respecto a las Unidades Derivadas Grupo Experimental y Control.....	89

INTRODUCCIÓN

En el vasto ecosistema de la educación superior, pocas disciplinas evocan una respuesta tan polarizada como las matemáticas. Para una minoría, representa un lenguaje de elegancia y precisión, la clave para desvelar los patrones del universo. Sin embargo, para una mayoría significativa de estudiantes universitarios, especialmente aquellos en campos no directamente ligados a las ciencias exactas, la experiencia matemática se asemeja más a un encuentro con un código arcano e impenetrable, una fuente de ansiedad y un obstáculo formidable en su trayectoria académica. Esta disonancia no es un mero accidente pedagógico, sino el síntoma de una problemática profunda y persistente: la enseñanza de las matemáticas ha privilegiado históricamente su faceta computacional y algorítmica, descuidando su naturaleza fundamental como un lenguaje complejo con su propio sistema de signos, su gramática y sus convenciones discursivas. Este libro parte de una premisa radical pero necesaria: el fracaso y la desafección en el aprendizaje matemático no son primordialmente un problema de aptitud cognitiva, sino un desafío de alfabetización.

Desarrollando esta idea, la presente obra se articula en torno a la tesis central de que para superar las barreras cognitivas, epistemológicas y afectivas que plagan la educación matemática, es imperativo un cambio de paradigma. Este cambio implica transitar desde una pedagogía centrada en la transmisión de procedimientos hacia una enfocada en la **traducción**

semiótica. Se postula que la resolución de problemas matemáticos, lejos de ser un acto puramente mecánico, es un sofisticado proceso de lectura crítica, interpretación, traducción entre diferentes registros de representación (verbal, simbólico, gráfico) y, finalmente, escritura argumentativa. Concebir la actividad matemática desde esta perspectiva lingüística no solo redefine el objeto de estudio, sino que también ilumina la naturaleza de las dificultades estudiantiles. La brecha cognitiva que se abre entre la flexibilidad del lenguaje natural y la rigidez precisa del discurso matemático —una brecha documentada por la investigación en semiótica educativa (Manolino, 2024)— es, argumentamos, el epicentro del problema. Esta perspectiva, que cuestiona la concepción de las matemáticas como un conocimiento “dado” e inmutable, se alinea con las críticas de académicos como Li y Schoenfeld (2019), quienes advierten que tal visión aliena a los estudiantes y obstaculiza una comprensión significativa.

En respuesta a este diagnóstico, este libro presenta y valida una propuesta pedagógica innovadora: el **Programa LECOP (Lectura y Escritura para la Comprensión de Problemas)**. LECOP no es una simple colección de técnicas de estudio, sino un modelo metodológico integral diseñado para guiar explícitamente a los estudiantes a través de este proceso de traducción semiótica. Su filosofía se basa en equipar a los aprendices con las herramientas necesarias para decodificar el lenguaje matemático, construir modelos coherentes y comunicar sus razonamientos de manera efectiva. Al hacerlo, LECOP busca no solo mejorar el rendimiento académico, sino también transformar la relación subjetiva del estudiante con la disciplina, desmantelando las barreras de ansiedad y baja autoeficacia que a menudo la acompañan (Rozgonjuk et al., 2020). La eficacia de enfoques que integran la instrucción lingüística en el aprendizaje matemático ha sido constatada en revisiones sistemáticas que evidencian un impacto positivo en la capacidad de resolución de problemas (Espinás & Fuchs, 2022), lo que proporciona un sustento empírico inicial para la propuesta que se desarrollará.

Para construir este argumento de manera rigurosa y sistemática, la obra se ha estructurado en cuatro capítulos principales, seguidos de unas reflexiones finales. Cada capítulo cumple una función específica dentro de la arquitectura lógica del libro, guiando al lector desde el diagnóstico del problema hasta la validación de la solución y sus proyecciones futuras.

El **Capítulo 1** se dedica a establecer el andamiaje teórico de la investigación. Profundiza en el diagnóstico del problema, desglosando la concepción de la matemática como un sistema semiótico complejo. En esta primera parte, se analizan las brechas cognitivas que surgen de la colisión entre el lenguaje matemático y el natural, y se exploran las consecuentes barreras epistemológicas y afectivas que obstaculizan el aprendizaje en el contexto universitario, extendiendo el análisis a diversas disciplinas.

Prosiguiendo con la solución, el **Capítulo 2** presenta el programa LECOP en detalle. Esta sección describe sus fundamentos teóricos, anclados en la psicología cognitiva y la pedagogía sociocultural, y desglosa su arquitectura metodológica. Se presenta el ciclo LECOP como un proceso iterativo de lectura, traducción y escritura, y se detallan las estrategias y herramientas específicas de cada fase, así como el rol fundamental del docente como mediador semiótico.

A continuación, el **Capítulo 3** se enfoca en la validación empírica del modelo. Este capítulo presenta y analiza el impacto del programa LECOP en el desempeño y la actitud estudiantil. Para ello, recurre a una triangulación de evidencias cualitativas —como estudios de caso y análisis del discurso— y cuantitativas —como la medición del rendimiento y la variación en los niveles de ansiedad y autoeficacia—. Además, argumenta que los beneficios de LECOP trascienden el aula de matemáticas, fomentando competencias transversales clave como el pensamiento crítico y la capacidad de argumentación.

Finalmente, el **Capítulo 4** ancla toda la discusión teórica y metodológica en una experiencia concreta, presentando un estudio de caso detallado. Este capítulo describe la aplicación del programa LECOP para mejorar el lenguaje científico de la matemática en estudiantes universitarios de ciencias sociales y humanidades, detallando su metodología, sus hallazgos y sus conclusiones específicas. Este caso práctico sirve como una ilustración tangible y una prueba de concepto de la eficacia del modelo en un entorno real.

La obra concluye con unas **Reflexiones Finales**, donde se sintetizan las contribuciones principales del libro, se discuten sus implicaciones para la práctica docente y el diseño curricular, y se proponen futuras líneas de investigación que se abren a partir de este trabajo. Este recorrido busca no solo ofrecer un análisis riguroso de una problemática educativa, sino también proporcionar una herramienta práctica y teóricamente fundamentada para aquellos educadores, investigadores e instituciones comprometidos con la humanización de la enseñanza de las matemáticas y la construcción de una verdadera cultura de la comprensión.

CAPÍTULO I

LA SEMIÓTICA DEL DISCURSO MATEMÁTICO: EPISTEMOLOGÍA, COGNICIÓN Y DESAFÍOS EN EL CONTEXTO UNIVERSITARIO

1.1. Más allá de los números, la matemática como lenguaje

La demarcación epistemológica de la matemática ha sido históricamente un campo de debate filosófico y pedagógico, a menudo reduciendo su naturaleza a un mero conjunto de algoritmos y herramientas de cálculo para la resolución de problemas abstractos. Sin embargo, una perspectiva contemporánea, enriquecida por décadas de investigación en educación y cognición, exige un cambio de paradigma fundamental: la conceptualización de la matemática no como un artefacto de cómputo, sino como un lenguaje complejo y multifacético. Este enfoque postula que la actividad matemática es, en su esencia, un acto comunicativo y de construcción de significados, mediado por un sofisticado sistema de signos (Presmeg & Kaiser, 2019).

Entender la disciplina desde esta óptica lingüística no solo redefine su ontología, sino que también desvela el origen de muchas de las dificultades que los estudiantes universitarios enfrentan, las cuales trascienden la simple inhabilidad para aplicar fórmulas. Se trata de un desafío de alfabetización en un idioma con reglas, registros y matices que difieren radicalmente de los del lenguaje natural con el que se comunican cotidianamente (Radford & Presmeg, 2022). Esta disonancia lingüística se convierte, por tanto, en el epicentro del problema pedagógico que este libro se propone analizar y, subsecuentemente, abordar.

Desde esta perspectiva, la aparente objetividad y universalidad de las verdades matemáticas se revela como una construcción social y cultural que depende intrínsecamente de sistemas de representación compartidos.

La semiótica, como ciencia de los signos, ofrece un andamiaje teórico indispensable para deconstruir esta realidad, permitiendo examinar cómo los conceptos matemáticos son objetivados y comunicados a través de un diverso repertorio de artefactos simbólicos como numerales, variables, gráficos y diagramas (Lerman, 2020). Al considerar la matemática como un lenguaje, se reconoce que el dominio de esta disciplina no reside únicamente en la capacidad de manipular estos símbolos, sino, de manera crucial, en la competencia para interpretar sus significados, moverse fluidamente entre diferentes registros de representación y utilizarlos para argumentar, modelar y persuadir dentro de una comunidad de práctica. Esta visión desplaza el foco del aprendizaje desde la memorización de procedimientos hacia la construcción activa de significados, un proceso que es inherentemente semiótico y que subyace a toda actividad cognitiva en el campo matemático (Presmeg & Kaiser, 2019).

Esta reconceptualización tiene implicaciones profundas para la didáctica, pues sugiere que enseñar matemáticas es análogo a enseñar un segundo idioma, con sus propias complejidades léxicas y gramaticales. El fracaso en reconocer esta dimensión lingüística a menudo conduce a prácticas pedagógicas que privilegian la corrección sintáctica —la aplicación correcta

de una regla— sobre la comprensión semántica —el entendimiento del porqué de esa regla y su conexión con un concepto—.

Un análisis como el realizado por Burgos et al. (2020), aunque centrado en la educación primaria, evidencia cómo las discrepancias entre los significados institucionales y los significados personales de los estudiantes emergen precisamente de las dificultades en la traducción entre distintos registros semióticos, un hallazgo extrapolable al contexto universitario. La investigación de dichos autores constata que una mayoría significativa de estudiantes presenta dificultades en la conversión entre registros, lo que solidifica la noción de que las barreras en el aprendizaje matemático son de naturaleza fundamentalmente lingüística.

En consecuencia, el argumento central de esta obra se erige sobre esta premisa: para humanizar la enseñanza de las matemáticas y hacerla accesible, es imperativo abordarla desde su condición de lenguaje. Al hacerlo, se ilumina la naturaleza de las barreras cognitivas y afectivas que obstaculizan el progreso de los estudiantes, justificando así la necesidad de un modelo pedagógico que se centre explícitamente en el desarrollo de competencias de “traducción” y “comprensión” lingüística. El programa LECOP (Lectura y Escritura para la Comprensión de Problemas), que se detallará en el capítulo 2, emerge como una respuesta directa a este diagnóstico.

Dicho programa no es una simple colección de técnicas de resolución de problemas, sino un marco metodológico integral diseñado para guiar a los estudiantes en el proceso de alfabetización en el lenguaje científico-matemático, equipándolos con las herramientas para decodificar, interpretar y comunicar ideas en este idioma tan particular (Radford & Presmeg, 2022). Este pórtico conceptual, por tanto, no solo establece la tesis del libro, sino que también siembra la justificación teórica para la intervención pedagógica que constituye su núcleo propositivo.

1.1.1. Conceptualización de la matemática como un sistema semiótico: Sintaxis, semántica y pragmática

Partiendo de la premisa de que la matemática opera como un lenguaje, se hace indispensable un análisis más profundo de su estructura interna a través de una lente teórica rigurosa. El Enfoque Ontosemiótico (EOS), desarrollado extensamente por Godino y sus colaboradores, proporciona un marco conceptual robusto para esta tarea, al integrar herramientas de la semiótica clásica para desglosar la anatomía del conocimiento matemático (Godino et al., 2019). Este enfoque postula que la actividad matemática es fundamentalmente un sistema de prácticas operativas y discursivas, donde la noción de “función semiótica” —la correspondencia entre un signo y su objeto o significado— es central.

Dicha perspectiva permite trascender una visión platónica de los objetos matemáticos como entidades preexistentes y, en su lugar, los considera como emergentes de estas prácticas, objetivados a través de una compleja red de representaciones (Godino, 2024). Es en la articulación de esta red donde se pueden diseccionar las tres dimensiones canónicas de todo sistema semiótico, originalmente propuestas por Morris e inspiradas en Peirce y Saussure: la sintaxis, la semántica y la pragmática.

La dimensión sintáctica se refiere al conjunto de reglas formales que gobiernan la construcción y manipulación de las expresiones dentro del lenguaje matemático. Atiende a la estructura y a las relaciones entre los signos, independientemente de su significado. Esta dimensión abarca las normas de notación, las reglas de inferencia lógica, la gramática de las fórmulas algebraicas y los algoritmos de cálculo (Godino, 2024). Por ejemplo, la regla que dicta que la expresión $(a + b)^2$ debe expandirse como $a^2 + 2ab + b^2$ es una regla puramente sintáctica.

De igual modo, la sintaxis define por qué $\int dx f(x)$ es una expresión bien formada, mientras que $dx \int f(x)$ no lo es. El dominio de esta dimensión es lo que tradicionalmente se asocia con la competencia matemática:

la capacidad de realizar operaciones y manipulaciones simbólicas de manera correcta y eficiente. Sin embargo, el EOS advierte que un enfoque pedagógico que se limita a esta dimensión produce un conocimiento frágil e instrumental, desprovisto de comprensión profunda, ya que los estudiantes aprenden a “jugar el juego” de los símbolos sin entender el significado detrás de ellos (Godino et al., 2019).

En contraste, la dimensión semántica se ocupa de la relación entre los signos y los objetos, conceptos o ideas que estos representan. Es la dimensión del significado. Mientras la sintaxis se pregunta “¿cómo se escribe?”, la semántica se pregunta “¿qué significa?”. Por ejemplo, el símbolo π (pi) se conecta semánticamente con el concepto de la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. La expresión $f'(x)$ se vincula semánticamente con la idea de la tasa de cambio instantánea de una función en un punto (Godino, 2024).

Esta dimensión es crucial para la comprensión conceptual, ya que permite a los estudiantes construir modelos mentales de los objetos matemáticos y entender las relaciones entre ellos. Un análisis ontosemiótico revela que un mismo signo puede tener múltiples significados dependiendo del contexto (polisemia), y un mismo concepto puede ser representado por múltiples signos (sinonimia), lo que constituye una fuente significativa de conflictos semióticos para el aprendiz (Godino et al., 2024). La capacidad de navegar estas complejidades semánticas es un pilar fundamental de la verdadera alfabetización matemática.

Finalmente, la dimensión pragmática concierne a la relación entre los signos y sus usuarios, así como al propósito y al contexto en el que se utilizan. Esta dimensión responde a la pregunta “¿para qué se usa y quién lo usa?”. La pragmática reconoce que el significado de una expresión matemática no es absoluto, sino que se negocia y se construye dentro de una comunidad de práctica y en función de una finalidad específica (Godino et al., 2019). Por ejemplo, la elección de representar un conjunto de datos mediante un gráfico de barras en lugar de un diagrama de dispersión es

una decisión pragmática, guiada por el objetivo de comparar categorías en lugar de identificar correlaciones.

De manera similar, la interpretación de un resultado estadístico como “significativo” depende de un umbral de confianza ($p < 0.05$) que es una convención pragmática de la comunidad científica. El marco ontosemiótico subraya que la enseñanza de la matemática debe tener en cuenta esta dimensión, contextualizando el conocimiento y mostrando su utilidad y su poder para resolver problemas en situaciones concretas (Godino, 2024).

Un modelo de configuración ontosemiótica, propuesto por Godino (2024), articula estas dimensiones en una estructura hexagonal que interrelaciona componentes epistémicos, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos, proporcionando un mapa detallado para el análisis didáctico. Como evidencia de su robustez, el autor reporta una alta concordancia en estudios de validación que aplican este modelo para analizar la interpretación de signos por parte de los estudiantes. La tabla siguiente, adaptada del enfoque de Godino (2024), sintetiza estas tres dimensiones clave del sistema semiótico matemático.

Tabla 1 El pH por muestra de compost

Dimensión Semiótica	Foco de Análisis	Pregunta Clave	Ejemplo en el Contexto de $f(x) = x^2$
Sintaxis	Reglas de formación y manipulación de expresiones.	¿Cómo se estructura y opera?	La notación $f(x)$ indica una función. La expresión x^2 sigue las reglas de la exponenciación. Derivarla $f'(x) = 2x$ es una operación sintáctica.
Semántica	Relación entre signos y los conceptos que representan.	¿Qué significa?	El símbolo f representa una relación funcional. La expresión x^2 significa "el número x multiplicado por sí mismo". El gráfico es una parábola.
Pragmática	Uso de los signos en un contexto y con un propósito.	¿Para qué y por quién se usa?	Se puede usar para modelar el área de un cuadrado de lado x . Se utiliza en física para describir la trayectoria de un proyectil.

Fuente: Elaboración propia a partir de Godino (2024)

En síntesis, la conceptualización de la matemática como un sistema semiótico descompuesto en estas tres dimensiones provee el andamiaje teórico fundamental para el resto de este libro. Comprender que la competencia matemática implica un dominio integrado de la sintaxis, la semántica y la pragmática permite un diagnóstico más preciso de las dificultades de aprendizaje. Además, esta estructura teórica servirá como base para analizar, en capítulos posteriores, cómo un programa como LECOP puede ser diseñado para abordar de manera explícita y equilibrada cada una de estas facetas, fomentando así una comprensión más holística y robusta del lenguaje matemático. Este desglose es estrictamente teórico-descriptivo y sienta las bases para explorar, en la siguiente sección,

el choque cognitivo que se produce cuando este sistema semiótico tan particular colisiona con el lenguaje natural del estudiante (Godino et al., 2024).

1.1.2. El discurso matemático vs. el lenguaje natural: Un análisis de las brechas y los puentes cognitivos

Al haber establecido la estructura semiótica interna del lenguaje matemático, el siguiente paso lógico es analizar la fricción que se genera en la interfaz entre este sistema y el lenguaje natural, que es el vehículo primario del pensamiento y la comunicación humana. A diferencia del discurso matemático, caracterizado por su precisión, su aspiración a la no ambigüedad y su sintaxis rigurosamente definida, el lenguaje natural es inherentemente flexible, contextual, polisémico y a menudo ambiguo (Manolino, 2024).

Esta divergencia fundamental en sus principios operativos no es trivial; crea una serie de “brechas cognitivas” que representan uno de los mayores obstáculos para los aprendices. No se trata simplemente de aprender un nuevo vocabulario, sino de adoptar un modo de pensamiento completamente diferente, un proceso que Leron y Hazzan (2022) comparan con la transición evolutiva entre formas de comunicación, donde el pensamiento matemático exige un nivel de descontextualización que choca frontalmente con la naturaleza situada del lenguaje cotidiano.

Una de las brechas más evidentes se manifiesta en la polisemia de términos aparentemente sencillos. Palabras como “función”, “raíz”, “límite”, “producto” o “diferencia” poseen significados muy específicos y restringidos en matemáticas, que a menudo entran en conflicto con sus connotaciones más amplias y flexibles en el habla común. Un estudiante puede entender “función” en el sentido de “propósito” o “rol”, lo que interfiere con la comprensión de su definición matemática como una relación unívoca entre dos conjuntos (Viseu et al., 2021).

De manera similar, el término “mitad” en el lenguaje natural puede ser vago (“dame la mitad más grande”), mientras que en matemáticas representa con precisión el número racional $1/2$. Este conflicto léxico no es un mero detalle, sino que puede generar cortocircuitos conceptuales profundos, ya que el estudiante intenta asimilar un nuevo concepto utilizando un andamiaje lingüístico preexistente que resulta ser inadecuado y engañoso (Manolino, 2024).

Más allá del léxico, la brecha se extiende a la estructura sintáctica y al discurso. El lenguaje matemático opera con una sintaxis de alta densidad y una estructura lógica implacable, donde el orden de los símbolos y la puntuación (como los paréntesis) alteran drásticamente el significado. Un cambio mínimo en una ecuación puede transformarla por completo, una rigidez que no tiene parangón en el lenguaje natural, donde la redundancia y la capacidad de inferir el significado a partir del contexto permiten una comunicación eficaz a pesar de las imprecisiones gramaticales (Leron & Hazzan, 2022).

Esta diferencia estructural exige al estudiante un nivel de atención al detalle y una capacidad de procesamiento secuencial que a menudo no han desarrollado. El estudio de Viseu et al. (2021) sobre el aprendizaje de los números racionales, por ejemplo, evidencia empíricamente cómo los estudiantes luchan al pasar de representaciones pictóricas o verbales (más cercanas al lenguaje natural) a la representación simbólica formal, demostrando que esta transición entre registros semióticos no es automática, sino un proceso cognitivamente exigente y plagado de posibles errores de “traducción”.

Esta brecha cognitiva se ve exacerbada por lo que se conoce como el “sesgo de los números naturales”, una tendencia cognitiva a aplicar incorrectamente las propiedades de los números enteros a otros dominios numéricos, como las fracciones o los decimales. Manolino (2024) señala que este sesgo tiene raíces lingüísticas, ya que el lenguaje natural está predominantemente estructurado en torno a la cuantificación discreta.

Este fenómeno ilustra a la perfección cómo los modelos mentales forjados a través del lenguaje cotidiano pueden actuar como un obstáculo epistemológico al abordar conceptos matemáticos más abstractos. La superación de esta brecha requiere, por tanto, la construcción de “puentes cognitivos”, que son esencialmente estrategias metacognitivas y pedagógicas diseñadas para hacer explícitas las diferencias entre los dos sistemas lingüísticos y para facilitar la traducción consciente entre ellos.

En este contexto, la labor de construir puentes cognitivos implica, en primer lugar, desarrollar la conciencia semiótica en los estudiantes. Se trata de enseñarles a reconocer cuándo una palabra se está utilizando en su sentido matemático técnico frente a su sentido coloquial. Implica, además, entrenarlos en la habilidad de moverse deliberadamente entre diferentes registros de representación (verbal, simbólico, gráfico, tabular), entendiendo que cada registro ofrece una perspectiva diferente sobre el mismo objeto matemático y que la comprensión profunda reside en la capacidad de integrarlos (Viseu et al., 2021).

Un enfoque pedagógico eficaz, por tanto, no debe ignorar el lenguaje natural, sino utilizarlo estratégicamente como punto de partida, como un anclaje desde el cual se explicitan las reglas y la lógica del nuevo lenguaje a aprender. Este análisis comparativo y cognitivo, al centrarse en las dificultades de procesamiento y traducción, sienta las bases para comprender, en la siguiente sección, cómo estas brechas cognitivas pueden derivar en barreras de naturaleza afectiva y epistemológica, consolidando el diagnóstico del problema que justifica la intervención pedagógica central de este libro (Leron & Hazzan, 2022).

1.2. Barreras epistemológicas y afectivas en el aprendizaje de las matemáticas superiores

Una vez analizadas las brechas cognitivas inherentes a la colisión entre el lenguaje matemático y el natural, el foco de la investigación debe necesariamente desplazarse desde la estructura del lenguaje hacia el sujeto que lo aprende. Las dificultades de procesamiento y traducción no ocurren en un vacío; por el contrario, precipitan y se entrelazan con una serie de barreras de naturaleza profundamente psicológica y sociológica que condicionan la experiencia del estudiante universitario.

Estas barreras pueden clasificarse en dos grandes dominios interconectados: las epistemológicas, que se refieren a las creencias y preconcepciones del estudiante sobre la naturaleza misma del conocimiento matemático; y las afectivas, que abarcan la dimensión emocional y actitudinal de su relación con la disciplina. La interacción de estos dos tipos de obstáculos configura un ciclo de retroalimentación negativa que puede llevar al desenganche, la evitación y, en última instancia, al fracaso académico, completando así el diagnóstico del problema que este libro aborda.

Las barreras epistemológicas se originan en una concepción errónea de las matemáticas, a menudo fomentada por experiencias educativas previas, que las presenta como un cuerpo de conocimiento estático, absoluto y algorítmico. Como problematizan Li y Schoenfeld (2019), esta visión de la matemática como un conjunto de “hechos dados” y recetas infalibles que deben ser memorizadas y aplicadas mecánicamente, aliena profundamente a los estudiantes. Esta perspectiva instrumentalista no solo es epistemológicamente incorrecta —pues ignora la naturaleza dinámica, creativa y falible del quehacer matemático—, sino que también es pedagógicamente devastadora. Fomenta un enfoque de aprendizaje superficial, donde el objetivo no es comprender los conceptos, sino encontrar el procedimiento correcto para obtener una respuesta (Rozgonjuk et al., 2020). Cuando estos estudiantes se enfrentan a las matemáticas superiores, donde la justificación, la demostración y la conceptualización abstracta

son primordiales, su andamiaje epistemológico se derrumba, generando una sensación de impotencia y desorientación.

Esta frustración epistemológica es el caldo de cultivo perfecto para la emergencia de barreras afectivas, siendo la ansiedad matemática una de las más documentadas y perniciosas. La ansiedad matemática se define como un estado de tensión, aprensión y miedo que interfiere con la manipulación de números y la resolución de problemas matemáticos en contextos académicos y cotidianos (Bjälkebring, 2019). Este fenómeno no es simplemente un sinónimo de tener dificultades; es una reacción emocional debilitante que puede mermar la memoria de trabajo, reducir la capacidad de atención y sabotear el rendimiento incluso en estudiantes con un potencial cognitivo adecuado.

La investigación de Rozgonjuk et al. (2020) evidencia una fuerte correlación negativa entre la ansiedad matemática y la autoeficacia, que es la creencia en la propia capacidad para organizar y ejecutar las acciones requeridas para alcanzar determinados logros. Un estudiante con baja autoeficacia tiende a evitar los desafíos, a rendirse fácilmente ante los obstáculos y a atribuir sus fracasos a una falta de habilidad innata (“no soy bueno para las matemáticas”), consolidando una identidad de “incapaz”.

El círculo vicioso se cierra cuando estas barreras afectivas refuerzan las epistemológicas. El miedo al error, una manifestación central de la ansiedad matemática, inhibe la exploración, la conjetura y la toma de riesgos, que son actividades esenciales para una comprensión profunda y un aprendizaje significativo (Bjälkebring, 2019).

Un estudiante ansioso buscará refugio en la seguridad aparente de las fórmulas y los procedimientos memorizados —reforzando su visión de la matemática como un conjunto de recetas— porque el territorio de la conceptualización y la argumentación se percibe como demasiado amenazante. De este modo, las creencias epistemológicas disfuncionales alimentan la ansiedad, y la ansiedad, a su vez, impide el desarrollo de

creencias más sofisticadas y auténticas sobre la disciplina (Li & Schoenfeld, 2019). El análisis empírico de Rozgonjuk et al. (2020) resulta esclarecedor al constatar que los estudiantes con alta ansiedad matemática tienden a adoptar un enfoque de aprendizaje superficial, mientras que aquellos con mayor autoeficacia se inclinan por un aprendizaje profundo, lo que demuestra la íntima conexión entre la dimensión afectiva y las estrategias cognitivas.

En conclusión, este análisis de las respuestas subjetivas del estudiante completa el diagnóstico del problema. Las dificultades cognitivas para “traducir” el lenguaje matemático (1.1.2) no son meros tropiezos técnicos, sino que se transforman en una experiencia de alienación (barrera epistemológica) y de amenaza (barrera afectiva). Esta comprensión justifica por qué cualquier intervención pedagógica efectiva, como el programa LECOP que se propondrá en el Capítulo 2, no puede limitarse a ser metodológicamente sólida.

Debe ser, además, fundamentalmente humanizadora: debe abordar activamente estas barreras, creando un entorno de aprendizaje seguro que reconfigure las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y sobre sí mismos. Por ello, la evaluación del impacto de dicho programa, que se detallará en el Capítulo 3, medirá no solo la mejora en el rendimiento académico (3.1.2), sino también la transformación en la actitud, la autoeficacia y la subjetividad del aprendiz (3.2.2), reconociendo que la verdadera educación matemática reside en la superación conjunta de los obstáculos cognitivos, epistemológicos y afectivos.

1.3. El Lenguaje matemático en las disciplinas universitarias

Tras haber diagnosticado las dificultades cognitivas y las barreras subjetivas que emergen de la naturaleza lingüística de las matemáticas, resulta imperativo ampliar el foco de análisis más allá del aula de matemáticas puras. La percepción de esta disciplina como un campo aislado y autorreferencial es una falacia que ignora su rol fundamental

como lenguaje transversal y habilitante en la vasta mayoría de las carreras universitarias. La competencia en el lenguaje matemático no es un requisito exclusivo para los futuros matemáticos, sino una habilidad esencial para estudiantes de ciencias sociales, economía, ingeniería y ciencias de la vida.

En cada uno de estos dominios, los conceptos y modelos matemáticos no son meros apéndices cuantitativos, sino que constituyen el andamiaje sintáctico y semántico sobre el cual se construyen, se validan y se comunican las teorías fundamentales de la disciplina. Por consiguiente, las mismas brechas y barreras identificadas previamente se manifiestan, a menudo con mayor intensidad, en estos contextos aplicados, donde los estudiantes deben no solo comprender el lenguaje matemático, sino también traducirlo y conectarlo con los fenómenos específicos de su campo de estudio.

En el ámbito de las ciencias económicas, por ejemplo, la matematización ha sido un proceso histórico que ha transformado la disciplina desde una narrativa predominantemente descriptiva a un campo rigurosamente modelado. Como detalla la revisión histórica de Czerwinski (2024), desde la introducción del cálculo por Cournot en el siglo XIX hasta el desarrollo de modelos de equilibrio general y teorías de crecimiento como el modelo Solow-Swan, la economía moderna es inconcebible sin su formalización matemática.

Para un estudiante de economía, expresiones como las ecuaciones diferenciales que describen la acumulación de capital o las matrices que representan flujos intersectoriales no son ejercicios abstractos; son la gramática misma con la que se articula la teoría económica. La incapacidad para leer, interpretar y manipular este lenguaje no solo impide la resolución de problemas técnicos, sino que bloquea el acceso a la comprensión profunda de los debates y paradigmas centrales de su propia disciplina.

De manera similar, en el campo de la ingeniería, las matemáticas constituyen el lenguaje universal para el diseño, el análisis y la optimización de sistemas. La revisión de la literatura realizada por Pepin et al. (2021) evidencia que la integración de las matemáticas en los currículos de ingeniería es un desafío pedagógico constante, precisamente porque no se trata de una simple aplicación de fórmulas, sino de un complejo proceso de modelización. Un estudiante de ingeniería civil debe ser capaz de traducir un problema de cargas sobre una estructura al lenguaje de las ecuaciones de equilibrio estático; un estudiante de ingeniería eléctrica debe dominar el lenguaje de los números complejos para analizar circuitos de corriente alterna. El obstáculo aquí no reside en el cálculo en sí, sino en la fase de traducción semiótica: la capacidad de ver un fenómeno físico y representarlo mediante un modelo matemático coherente. El fracaso en esta competencia lingüística se traduce directamente en una incapacidad para ejercer la práctica profesional de la ingeniería de manera efectiva y segura.

El alcance de este fenómeno se extiende incluso a las ciencias de la vida, un campo tradicionalmente considerado menos cuantitativo. La emergencia de la biología matemática como una disciplina central evidencia un cambio de paradigma (Jungck et al., 2020). Hoy en día, comprender la dinámica de poblaciones requiere el lenguaje de las ecuaciones diferenciales; analizar la propagación de enfermedades se basa en modelos epidemiológicos como el SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados); y la genómica moderna depende masivamente de herramientas estadísticas y algorítmicas. Para un estudiante de biología, la dificultad no radica en memorizar la fórmula de un modelo, sino en comprender las suposiciones que subyacen a ese modelo y cómo los parámetros de la ecuación se corresponden con variables biológicas reales. La barrera, una vez más, es de naturaleza lingüística y conceptual: la incapacidad para leer el “relato” que cuenta el modelo matemático sobre el sistema biológico que representa. La tabla siguiente ofrece una síntesis de cómo se manifiesta esta dependencia del lenguaje matemático en los campos mencionados.

Tabla 2 Manifestación del Lenguaje Matemático como Componente Esencial en Diversas Disciplinas Universitarias

Disciplina Universitaria	Ejemplo de Aplicación del Lenguaje Matemático	Principal Desafío Lingüístico para el Estudiante	Referencia Clave
Economía	Modelos de crecimiento económico (e.g., Solow-Swan) utilizando ecuaciones diferenciales.	Interpretar la semántica de los parámetros (e.g., tasa de ahorro, depreciación) y su impacto dinámico en el modelo.	Czerwinski (2024)
Ingeniería	Análisis de circuitos eléctricos en estado estacionario mediante números complejos y fasores.	Traducir componentes físicos (resistencias, inductores) a un sistema de representación simbólica y operar en él.	Pepin et al. (2021)
Biología	Modelado de la dinámica de una epidemia con un sistema de ecuaciones diferenciales (modelo SIR).	Conectar las variables matemáticas (S, I, R) con sus contrapartes biológicas y comprender las hipótesis del modelo.	Jungck et al. (2020)

Fuente: Elaboración propia a partir de las fuentes citadas

En definitiva, este análisis contextual demuestra que las dificultades con el lenguaje matemático no son un problema confinado a los departamentos de matemáticas. Se trata de una barrera transversal que afecta a una amplia gama de disciplinas universitarias, limitando el potencial de los estudiantes para alcanzar una comprensión profunda y una práctica competente en sus respectivos campos. Al ilustrar la extensión y la gravedad del problema en todo el ecosistema universitario, este apartado otorga universalidad y relevancia a la presente investigación. Justifica por qué un libro centrado

en la “traducción” del lenguaje matemático es crucial para un público académico diverso y, simultáneamente, sirve como un preámbulo natural para el Capítulo 4, donde se presentará un estudio de caso detallado que examina precisamente la aplicación y el impacto de una intervención pedagógica en estudiantes de ciencias sociales y humanidades, el colectivo a menudo considerado más vulnerable a este desafío.

CAPÍTULO II

EL PROGRAMA LECOP: UN MODELO PEDAGÓGICO PARA LA TRADUCCIÓN Y COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE CIENTÍFICO- MATEMÁTICO

2.1. Fundamentos y principios del Programa LECOP (Lectura y Escritura para la Comprensión de Problemas)

En respuesta directa a las barreras cognitivas, epistemológicas y afectivas diagnosticadas en el capítulo anterior, emerge la necesidad de una intervención pedagógica que trascienda la mera transmisión de contenidos y se enfoque en la raíz lingüística del problema. El Programa LECOP (Lectura y Escritura para la Comprensión de Problemas) se presenta como una propuesta metodológica integral diseñada para abordar este desafío. Su filosofía central se fundamenta en un cambio de paradigma radical: la resolución de un problema matemático no se concibe como un acto de cálculo, sino como un complejo proceso de alfabetización que involucra actos de lectura crítica, traducción semiótica y escritura argumentativa. Este enfoque redefine el rol del estudiante, transformándolo de un receptor pasivo de algoritmos a un agente activo que construye significado a través de la interacción discursiva con el lenguaje matemático. La premisa es que, al dotar a los estudiantes de herramientas explícitas para navegar la

sintaxis, la semántica y la pragmática de este lenguaje, se pueden superar los obstáculos que tradicionalmente han generado ansiedad y fracaso.

Desarrollando esta idea, el programa LECOP postula que la dificultad principal no reside en la matemática per se, sino en la incapacidad de los estudiantes para decodificar los enunciados de los problemas y traducirlos a un modelo matemático coherente. La investigación empírica corrobora la centralidad de esta competencia; estudios como el de Zhu y Wu (2023) han demostrado una correlación significativa y positiva entre la habilidad de lectura matemática y el rendimiento académico a largo plazo, sugiriendo que la capacidad de interpretar textos matemáticos es un predictor clave del éxito. LECOP, por tanto, se aleja de la enseñanza tradicional que a menudo da por sentada esta habilidad de “lectura” y salta directamente a la aplicación de fórmulas. En su lugar, el programa dedica un esfuerzo pedagógico consciente a desglosar el proceso de comprensión, tratando el enunciado de un problema como un texto que debe ser analizado, interpretado y reconstruido. Esta visión se alinea con la crítica de Li y Schoenfeld (2019) a la enseñanza de las matemáticas como un cuerpo de conocimiento “dado”, y propone una alternativa donde el conocimiento se construye activamente a través del diálogo y la interpretación.

Además, la filosofía de LECOP reconoce que la comprensión no es un estado binario (se entiende o no se entiende), sino un proceso dinámico que se consolida y se hace visible a través de la escritura. Se parte del principio de que solo se puede explicar con claridad aquello que se ha comprendido en profundidad. Por ello, la escritura explicativa se convierte en una herramienta pedagógica y de evaluación fundamental dentro del programa. No basta con que el estudiante llegue a la respuesta correcta; debe ser capaz de articular por escrito el “porqué” de su procedimiento, justificar sus decisiones y conectar la solución matemática con el contexto del problema original. Esta exigencia de verbalización escrita fuerza al estudiante a organizar su pensamiento, a confrontar sus propias lagunas conceptuales y a adoptar la rigurosidad argumentativa propia del discurso científico. La eficacia de este tipo de enfoques lingüísticos ha sido respaldada

por análisis como el de Espinas y Fuchs (2022), quienes, a través de una revisión de múltiples estudios, constatan que la instrucción que integra componentes del lenguaje tiene un efecto positivo y significativo en el desarrollo de competencias matemáticas, especialmente en la resolución de problemas.

En esencia, LECOP se posiciona como un modelo que busca “humanizar” la enseñanza de las matemáticas al reconocer y abordar explícitamente su dimensión lingüística. Al redefinir la resolución de problemas como un acto de lectura, traducción y escritura, el programa no solo busca mejorar el rendimiento académico, sino también transformar la relación del estudiante con la disciplina. El objetivo último es dismantelar las barreras afectivas y epistemológicas, fomentando una mayor autoeficacia y una visión de las matemáticas como un campo accesible y significativo, en lugar de un dominio arcano y amenazante. Esta presentación conceptual del programa, que lo define por su “qué es” y “por qué existe”, sienta las bases para explorar, en las siguientes secciones, los fundamentos teóricos que lo legitiman y la estructura cíclica que lo articula, sin entrar aún en el detalle de sus fases operativas.

2.1.1. Bases teóricas

Para garantizar su rigor y legitimidad académica, el programa LECOP no emerge como una invención aislada, sino que se ancla firmemente en marcos teóricos consolidados de la psicología cognitiva, la pedagogía y la lingüística aplicada. Su arquitectura conceptual es una síntesis informada que integra principios del constructivismo, la teoría sociocultural del aprendizaje y los modelos de comprensión lectora. Este enfoque ecléctico pero coherente permite dotar al programa de una base sólida para justificar por qué sus estrategias son efectivas para el desarrollo de la competencia matemática. El objetivo de este apartado es, por tanto, delinear estas bases teóricas, demostrando que LECOP es el resultado de una aplicación deliberada de la investigación educativa y no una mera colección de técnicas intuitivas.

En primer lugar, LECOP se sustenta en una perspectiva constructivista del aprendizaje, que postula que el conocimiento no se recibe pasivamente, sino que es construido activamente por el individuo en interacción con su entorno. Esta visión se opone frontalmente a los modelos transmisionistas de enseñanza. Sin embargo, LECOP va más allá del constructivismo piagetiano individual y se alinea de manera preponderante con la teoría sociocultural de Lev Vygotsky. Desde esta óptica, los procesos cognitivos superiores, como el pensamiento matemático, tienen un origen social y se desarrollan a través de la interacción y la mediación semiótica (Das, 2020). Conceptos vygotskianos como la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y el andamiaje son centrales para LECOP. La ZDP se define como el espacio entre lo que un estudiante puede hacer de forma independiente y lo que puede lograr con la guía de un par más capaz o un docente. Investigaciones como la de Rahman (2024) han constatado que la aplicación de la ZDP en la enseñanza STEM puede incrementar significativamente el rendimiento al proveer el soporte necesario para que los estudiantes aborden problemas que de otro modo estarían fuera de su alcance. LECOP opera precisamente en esta zona, utilizando sus fases como un sistema de andamiaje estructurado que guía al estudiante a través del complejo proceso de resolución de problemas.

Profundizando en la perspectiva sociocultural, el programa adopta la idea de Vygotsky de que el lenguaje no es solo un vehículo para expresar el pensamiento, sino una herramienta que lo moldea y lo transforma (Luong, 2022). La fase de escritura explicativa de LECOP, en particular, se basa en el principio vygotskiano de que la internalización del conocimiento se produce a través de la externalización del discurso. Al forzar al estudiante a poner sus pensamientos en palabras, se le obliga a organizar, clarificar y refinar su comprensión. Estudios como el de Sinaga et al. (2021) han mostrado que, aunque las habilidades de comunicación matemática de los estudiantes pueden ser inicialmente bajas, las intervenciones basadas en la mediación social y la interacción mejoran notablemente su capacidad para resolver problemas. LECOP, al promover el diálogo (con el texto, con los pares y con el docente) y la producción discursiva, busca precisamente

catalizar este desarrollo.

Finalmente, para fundamentar sus fases de lectura y comprensión, LECOP se inspira en los modelos de comprensión lectora de la psicología cognitiva, como los propuestos por teóricos como van Dijk y Kintsch. Estos modelos describen la comprensión de un texto no como una simple decodificación de palabras, sino como un proceso constructivo de multinivel en el que el lector crea una representación mental coherente del texto (la “base del texto”) y la integra con su conocimiento previo para formar un “modelo de situación”. La investigación de Öztürk et al. (2020) proporciona evidencia empírica contundente de la conexión entre estas habilidades y el éxito en matemáticas, al hallar una fuerte correlación positiva entre la comprensión lectora y la capacidad para resolver problemas matemáticos no rutinarios. Este hallazgo legitima el enfoque de LECOP de tratar los enunciados matemáticos como textos complejos que requieren estrategias de lectura específicas. Al hacerlo, el programa busca no solo mejorar la habilidad para extraer datos, sino también la capacidad de construir un modelo de situación mental robusto del problema, que es el prerrequisito para cualquier intento de solución exitoso. Este enfoque teórico en las bases de la solución pedagógica se distingue claramente de las teorías del problema (semiótica) abordadas en el Capítulo 1, y sirve como el pilar académico sobre el que se edifican las fases prácticas del programa.

2.1.2. El ciclo LECOP

Una vez establecidos los fundamentos filosóficos y las bases teóricas del programa, es crucial describir su arquitectura metodológica. El modelo LECOP no se concibe como una secuencia lineal de pasos, sino como un proceso iterativo y recursivo que se articula en un ciclo continuo. Esta estructura cíclica refleja la naturaleza no lineal del pensamiento y la resolución de problemas, donde la comprensión se construye gradualmente a través de aproximaciones sucesivas, revisiones y refinamientos. El ciclo LECOP organiza los principios del programa en un flujo de trabajo coherente, proporcionando tanto al estudiante como al

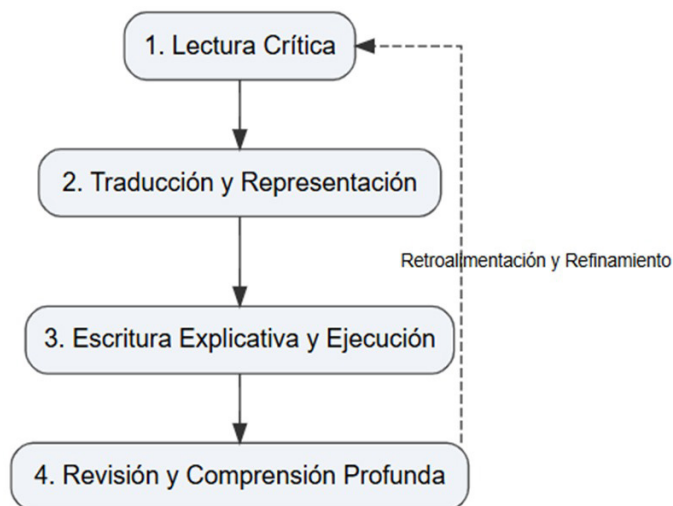
docente un mapa claro del proceso de aprendizaje. La lógica fundamental de este ciclo es transformar la resolución de problemas de un evento único y a menudo intimidante a un proceso manejable y reflexivo, compuesto por fases interdependientes.

El punto de partida del ciclo es siempre la **Lectura Crítica** del enunciado del problema. Esta fase inicial, como se ha justificado teóricamente, es fundamental y deliberadamente separada del resto del proceso. Aquí, el estudiante se enfoca exclusivamente en la deconstrucción del texto, aplicando estrategias para decodificar el lenguaje, identificar la información clave y comprender en profundidad la tarea requerida. Seguidamente, el ciclo avanza hacia la fase de **Traducción y Representación**, donde la información comprendida se re-codifica en diferentes registros semióticos. Este es el corazón del proceso de modelización, donde el lenguaje natural se traduce a lenguaje simbólico, a representaciones gráficas o a tablas, entre otros. La fluidez en esta traducción es un indicador clave de la comprensión (Shahbari & Tabach, 2019). Estos dos primeros movimientos del ciclo, lectura y traducción, preparan el terreno para la acción.

A continuación, el ciclo progresa hacia la **Escritura Explicativa y la Ejecución**, una fase dual donde el estudiante no solo realiza los procedimientos de cálculo necesarios, sino que, de manera crucial, documenta y justifica su razonamiento por escrito. La solución no es solo un número, sino una narrativa argumentativa. La culminación de cada iteración del ciclo es una fase de **Revisión y Comprensión Profunda**, donde se evalúa tanto la solución como el proceso. El estudiante reflexiona sobre su propio trabajo, identifica errores o lagunas y, lo más importante, interpreta el resultado en el contexto del problema original. Es en este punto donde el ciclo revela su naturaleza iterativa: si durante la revisión se detecta una incomprensión o un error conceptual, el estudiante es alentado a regresar a una fase anterior (por ejemplo, a releer críticamente el enunciado o a reconsiderar su modelo de traducción) para refinar su enfoque. Esta estructura se inspira en modelos cíclicos de aprendizaje y resolución de problemas, como los ciclos Plan-Do-Study-Act (PDSA) o

los ciclos de modelado matemático, que han demostrado ser eficaces para fomentar un aprendizaje más profundo y reflexivo (Rakes et al., 2023; Bekene & Machaba, 2024). A continuación se presenta un esquema visual que representa este flujo metodológico.

Figura 1 Diagrama del Ciclo Metodológico LECOP.



Fuente: Elaboración propia

Este esqueleto metodológico, por tanto, muestra cómo los principios del programa se organizan en un flujo de trabajo práctico. La naturaleza cíclica fomenta la metacognición y la autorregulación, habilidades esenciales para el aprendizaje autónomo (Santos, 2020). Al dividir el complejo acto de resolver un problema en fases más pequeñas y manejables, y al permitir la retroalimentación constante, el ciclo LECOP reduce la carga cognitiva y la ansiedad, promoviendo un entorno donde el error se ve como una oportunidad de aprendizaje y no como un fracaso (Klang et al., 2021). Este enfoque en el proceso y el flujo, sin entrar aún en el detalle de las técnicas específicas que se emplean en cada fase (reservadas para los siguientes apartados), proporciona la estructura macro sobre la cual se construye toda la intervención pedagógica de LECOP.

2.2. Estrategias y herramientas metodológicas del modelo LECOP

Habiendo delineado los fundamentos conceptuales y el esqueleto cíclico del programa LECOP, es imperativo ahora adentrarse en su núcleo operativo: la “caja de herramientas” metodológica que lo dota de sustancia práctica. Esta sección se dedica a desglosar las estrategias y técnicas concretas que componen cada una de las fases del ciclo, transformando los principios teóricos en acciones pedagógicas tangibles. Si el ciclo LECOP representa el “qué” y el “porqué” de la intervención, este apartado se ocupa del “cómo”, detallando los instrumentos cognitivos que se proporcionan al estudiante para navegar el complejo terreno de la resolución de problemas matemáticos.

El objetivo es presentar un arsenal de estrategias que, en su conjunto, equipan al aprendiz para abordar la lectura, la traducción y la escritura como actos deliberados y sistemáticos, en lugar de procesos intuitivos y a menudo azarosos. Este enfoque se alinea con la creciente evidencia que subraya la necesidad de metodologías activas y participativas para superar las limitaciones de la enseñanza tradicional (Morán et al., 2024).

La transición desde la teoría a la práctica metodológica se justifica por la constatación de que la mera exposición a los conceptos matemáticos es insuficiente para garantizar su comprensión y aplicación. Se requiere un andamiaje estructurado que guíe al estudiante a través de los procesos metacognitivos implicados en la resolución de problemas. En este sentido, el modelo LECOP se estructura en torno a tres fases operativas principales, cada una con su propio conjunto de herramientas y objetivos específicos: la Fase de Lectura Crítica, la Fase de Traducción Lingüística y la Fase de Escritura Explicativa.

Estas fases no deben entenderse como compartimentos estancos, sino como componentes interdependientes de un proceso holístico, donde la maestría en una de ellas potencia y facilita el desempeño en las siguientes. La revisión sistemática de Hidalgo y Aveiga (2025) refuerza esta visión

integrada, al concluir que las intervenciones más eficaces son aquellas que reconocen y abordan la relación bidireccional entre la competencia lectora y la habilidad matemática, implementando estrategias que abarcan todo el espectro del procesamiento de la información, desde la decodificación inicial hasta la comunicación de resultados.

El diseño de esta caja de herramientas se nutre de diversas corrientes pedagógicas, como el aprendizaje basado en problemas y el constructivismo, que sitúan al estudiante en el centro del proceso de aprendizaje (Morán et al., 2024). La selección de estrategias para cada fase se ha realizado con el fin de abordar directamente las barreras identificadas en el Capítulo 1.

Por ejemplo, las herramientas de la Fase de Lectura Crítica están diseñadas para combatir las brechas cognitivas que surgen del conflicto entre el lenguaje natural y el matemático. Las de la Fase de Traducción Lingüística buscan superar los obstáculos semióticos, enseñando a los estudiantes a operar con fluidez dentro del sistema de signos matemáticos. Finalmente, las de la Fase de Escritura Explicativa tienen como objetivo dismantlar las barreras epistemológicas y afectivas, fomentando la construcción de una identidad de autoría y competencia.

En los subapartados que siguen, se procederá a una descripción detallada de cada una de estas tres fases. Se presentarán las técnicas específicas, se explicará su propósito y se justificará su inclusión dentro del modelo. Es crucial entender que este apartado actúa como un mapa general de las herramientas disponibles, delegando la exploración profunda y el análisis pormenorizado de cada una a sus secciones correspondientes. De esta manera, se proporciona al lector una visión panorámica del repertorio metodológico de LECOP, antes de sumergirse en la mecánica precisa de su implementación, asegurando así una comprensión estructurada y progresiva del modelo.

La evidencia empírica respalda la efectividad de este tipo de enfoques estructurados; la investigación de Morán et al. (2024) con estudiantes universitarios constató que la aplicación de un sistema de estrategias metodológicas activas fue percibida como altamente beneficiosa para la comprensión de conceptos por el 96.8% de los participantes, validando la pertinencia de un modelo organizado y multifacético como LECOP.

2.2.1. El ciclo LECOP

Una vez presentada la estructura general, el análisis de las herramientas de LECOP comienza por su fundamento ineludible: la Fase de Lectura Crítica. Este primer paso operativo del ciclo se concibe como una etapa de deconstrucción y decodificación profunda del enunciado matemático. Su objetivo principal es desplazar al estudiante de una lectura superficial, orientada a la búsqueda inmediata de números y palabras clave para insertar en una fórmula, hacia una lectura analítica y estratégica, cuyo fin es construir una comprensión exhaustiva de la situación problemática antes de cualquier intento de resolución.

Esta fase es la aplicación práctica directa de las estrategias necesarias para superar las brechas cognitivas entre el lenguaje matemático y el natural, discutidas en el apartado 1.1.2. Se fundamenta en la premisa, respaldada empíricamente, de que la habilidad para resolver problemas complejos está intrínsecamente ligada a la capacidad de comprender críticamente los textos que los plantean (Öztürk et al., 2020). Por tanto, esta fase se centra exclusivamente en el proceso cognitivo del estudiante al enfrentarse al input textual, proveyéndole de un conjunto de técnicas para desentrañarlo sistemáticamente.

La primera herramienta metodológica dentro de esta fase es la **identificación de la estructura del texto**. Se entrena al estudiante para que no aborde el enunciado como un bloque monolítico de información, sino como un discurso estructurado con componentes funcionales específicos. Esta técnica implica un análisis activo para diseccionar y

clasificar la información en categorías como:

- a) La pregunta central o el objetivo final del problema
- b) Los datos explícitamente proporcionados (las “conocidas”)
- c) Las variables desconocidas que se deben hallar (las “incógnitas”)
- d) Las condiciones, restricciones o relaciones que vinculan los datos y las incógnitas.

La tesis de Mantilla (2024) subraya la importancia de esta descomposición como un paso inicial crucial para organizar el pensamiento y reducir la carga cognitiva. Al externalizar esta estructura, por ejemplo, mediante una tabla o un listado, el estudiante transforma un texto narrativo en un conjunto de elementos organizados, sentando las bases para la posterior modelización.

Consecutivamente, se introduce la técnica de **decodificación terminológica**, una de las más críticas de esta fase. Consiste en un análisis léxico-semántico deliberado para identificar y aislar las palabras clave que poseen un significado técnico preciso en matemáticas, distinguiéndolas de su uso en el lenguaje coloquial. Se enseña al estudiante a ser un “lector escéptico” de términos como “diferencia”, “producto”, “razón”, “función” o “raíz”, y a consultar activamente definiciones formales para asegurar su correcta interpretación en el contexto dado.

Esta estrategia ataca directamente el problema de la polisemia, una de las principales fuentes de error conceptual (Mantilla, 2024). Para facilitar este proceso, se pueden emplear herramientas como glosarios contextuales o, incluso, pedir a los estudiantes que construyan sus propios diccionarios terminológicos a medida que avanzan en el curso. El objetivo es desarrollar una sensibilidad semiótica que les permita reconocer cuándo el lenguaje opera bajo las reglas del registro matemático. La investigación de Öztürk

et al. (2020) apoya indirectamente la necesidad de esta habilidad, al demostrar que la comprensión lectora, que inherentemente incluye la precisión léxica, es un predictor significativo del éxito en problemas no rutinarios.

Complementando la decodificación, se aplica el **desglose y filtrado de información**. Muchos problemas matemáticos, especialmente aquellos que simulan contextos reales, contienen información superflua o contextual que no es necesaria para la solución. Se entrena al estudiante para que, una vez identificada la estructura del problema, pueda discernir activamente entre la información matemáticamente relevante y la información irrelevante o “ruido”.

Este proceso de filtrado no solo simplifica el problema, sino que también es un ejercicio de pensamiento crítico, pues requiere que el estudiante evalúe la pertinencia de cada pieza de información en función del objetivo final. Esta técnica es esencial para evitar la construcción de modelos incorrectos basados en datos espurios y para centrar los recursos cognitivos en los aspectos cruciales del problema (Mantilla, 2024).

Finalmente, esta fase culmina con la estrategia de **visualización inicial**. Se alienta al estudiante a formar una primera representación mental o un esquema preliminar de la situación descrita en el problema. Este no es todavía el modelo matemático formal que se construirá en la siguiente fase, sino un esbozo cognitivo —un dibujo rápido, un diagrama de flujo simple, una línea de tiempo— que ayude a organizar las relaciones entre los elementos identificados.

Este acto de visualización sirve como un puente entre la comprensión textual y la representación abstracta, permitiendo al estudiante “ver” el problema antes de intentar formalizarlo. El éxito de la Fase de Lectura Crítica, por tanto, se mide no por la capacidad de resolver el problema, sino por la habilidad de parafrasearlo con precisión, de explicar su estructura y sus componentes, y de describir la situación que plantea. Es un trabajo

puramente interpretativo que sienta las bases indispensables para la fase de traducción, pues es axiomático que no se puede traducir correctamente aquello que no se ha comprendido a fondo.

2.2.2. Fase de Traducción Lingüística

Una vez que el enunciado ha sido deconstruido y su significado inicial asegurado a través de la lectura crítica, el ciclo LECOP avanza hacia su fase transformacional: la **Fase de Traducción Lingüística**. Este apartado se enfoca en el proceso de re-representación, donde la información ya comprendida es sistemáticamente convertida desde el registro del lenguaje natural a diversos sistemas de representación semiótica propios de la matemática. Esta fase es la materialización de la teoría semiótica delineada en el apartado 1.1.1, pues es aquí donde el estudiante aprende a operar activamente con la sintaxis y la semántica del lenguaje matemático.

La investigación en educación matemática ha demostrado de manera contundente que la habilidad para realizar estas conversiones entre registros es una de las competencias cognitivas más complejas y, a la vez, más cruciales para el desarrollo de la comprensión matemática profunda (Ramírez, 2024). El objetivo de esta fase no es el cálculo, sino la construcción de un modelo matemático robusto que capture la esencia del problema.

La primera estrategia fundamental en esta fase es la **paráfrasis elaborada**. Aunque iniciada en la fase de lectura, aquí adquiere una función más formal. Se le pide al estudiante que reescriba el problema con sus propias palabras, pero esta vez con la intención explícita de usar un lenguaje más preciso y cercano a la estructura matemática. Esta técnica sirve como un autodiagnóstico crucial: si el estudiante no puede parafrasear el problema de manera coherente y sin omitir información clave, es una señal de que la comprensión lograda en la fase anterior es todavía deficiente y requiere una revisión. Esta re-escritura actúa como un puente cognitivo,

suavizando la transición desde la narrativa original del problema hacia su formalización simbólica (Valverde, 2024).

El núcleo de esta fase reside, sin embargo, en la **traducción a lenguaje simbólico**. Esta es la actividad central de conversión donde las relaciones, condiciones y cantidades identificadas en la fase de lectura se transforman en ecuaciones, inecuaciones, funciones, expresiones algebraicas o cualquier otra forma de notación matemática formal. Se enseñan técnicas explícitas para esta conversión, como la asignación de variables a las cantidades desconocidas, la identificación de operadores matemáticos correspondientes a verbos o frases clave (“es igual a” $\rightarrow =$, “es mayor que” $\rightarrow >$), y la estructuración de estas relaciones en un sistema sintácticamente correcto.

La tesis de Ramírez (2024), en un estudio con estudiantes universitarios de ingeniería, constató una correlación directa y estadísticamente muy alta ($r = 0.833$) entre el dominio de esta habilidad de conversión semiótica y la capacidad general para la modelización matemática. Este hallazgo empírico subraya la importancia capital de esta estrategia dentro del modelo LECOP.

Paralelamente a la traducción simbólica, se fomenta activamente la **creación de representaciones visuales y tabulares**. Esta estrategia se basa en el principio de que diferentes registros semióticos iluminan diferentes facetas de un problema y que la comprensión se enriquece al integrar múltiples perspectivas. Se guía al estudiante para que elabore diagramas, gráficos cartesianos, tablas de datos, esquemas de árbol o cualquier otro tipo de representación visual que pueda modelar la situación.

Por ejemplo, un problema de optimización puede ser más fácil de entender a través de su representación gráfica, mientras que un problema de probabilidad puede beneficiarse de un diagrama de Venn. La investigación de Valverde (2024) destaca que muchos estudiantes de pregrado enfrentan

dificultades significativas precisamente en la conversión entre el registro algebraico y el gráfico, lo que justifica la necesidad de entrenar esta habilidad de manera explícita.

Finalmente, la fase de traducción lingüística culmina con la estrategia del **movimiento fluido entre representaciones**. No basta con crear múltiples representaciones de forma aislada; la competencia avanzada reside en la capacidad de transitar entre ellas, utilizando una para informar o verificar la otra. Por ejemplo, un estudiante puede usar una tabla de valores para construir el gráfico de una función, y luego usar la forma del gráfico para inferir propiedades de su ecuación simbólica.

Este ir y venir entre registros (verbal, simbólico, gráfico, tabular) es lo que Duval, citado extensamente en los trabajos de Ramírez (2024) y Valverde (2024), identifica como la condición sine qua non para el aprendizaje matemático. Esta fase, por tanto, se enfoca por completo en la re-codificación y la construcción del modelo. Asume que la lectura ya fue hecha y delega la argumentación sobre la solución a la fase siguiente, centrando todos sus esfuerzos en dotar al estudiante de las herramientas para “traducir” el mundo a las matemáticas.

2.2.3. Fase de Escritura Explicativa

Habiendo construido un modelo matemático a través de una traducción semiótica rigurosa, la fase final y culminante del ciclo LECOP se enfoca en la síntesis, la argumentación y la comunicación del conocimiento: la **Fase de Escritura Explicativa**. Este componente del modelo se fundamenta en el principio pedagógico de que la comprensión profunda no solo se demuestra, sino que se construye y se refina a través del acto de explicar.

No es suficiente que el estudiante obtenga una respuesta numérica correcta; es imperativo que pueda articular un discurso coherente que justifique su procedimiento, interprete sus resultados y demuestre un

dominio conceptual del problema. Esta fase es crucial porque transforma la resolución de problemas de un ejercicio privado y a menudo tácito en un acto de comunicación científica. Las producciones escritas que se generan aquí se convierten en la evidencia más rica y tangible del aprendizaje, permitiendo una evaluación cualitativa que va más allá de la simple corrección de la respuesta final, tal como se explorará en el Capítulo 3.

La primera herramienta metodológica de esta fase es la enseñanza de la **estructuración de la respuesta**. Se guía al estudiante para que organice su solución siguiendo una estructura lógica y reconocible, similar a la de un mini-informe científico. Un formato típico podría incluir:

- a) Una breve presentación de los datos relevantes y las incógnitas (retomando el trabajo de la fase de lectura);
- b) El desarrollo del procedimiento, mostrando los pasos de manera clara y secuencial
- c) Una conclusión que enuncie explícitamente la respuesta final.

Esta estructura no solo facilita la comunicación y la evaluación, sino que también sirve como un andamiaje cognitivo para el propio estudiante, ayudándole a organizar su proceso de pensamiento de una manera lógica y sistemática, tal como propone el ciclo didáctico de Rizo (2024).

El corazón de la fase de escritura reside en la **argumentación del procedimiento**. Se instruye al estudiante para que vaya más allá de la mera presentación de los cálculos. Cada paso clave de la solución debe ir acompañado de una justificación escrita que responda a la pregunta “¿por qué?”. Por ejemplo, en lugar de simplemente escribir una ecuación, el estudiante debe explicar por qué esa ecuación es el modelo adecuado para la situación. En lugar de solo aplicar un teorema, debe enunciarlo y explicar por qué sus condiciones se cumplen en el problema actual.

La revisión sistemática de Teledahl et al. (2024) identifica esta capacidad de “elaboración y articulación” como un criterio fundamental de la calidad en la escritura matemática. Esta práctica obliga al estudiante a hacer explícitas sus razones, a conectar los procedimientos con los conceptos teóricos subyacentes y a moverse desde un conocimiento instrumental (saber el “cómo”) hacia un conocimiento relacional (saber el “porqué”).

Posteriormente, se trabaja la habilidad de **interpretación del resultado**. Una vez obtenida una solución numérica o simbólica, se guía al estudiante para que realice la “traducción de vuelta”, explicando el significado de su respuesta en el contexto del problema original. Si el resultado es $x = 5$, la tarea no termina ahí; el estudiante debe escribir una oración completa que explique qué representa ese “5” en el mundo real del problema (e.g., “Por lo tanto, se necesitan 5 horas para completar la tarea”). Esta práctica, destacada en el modelo de Rizo (2024), cierra el ciclo de la modelización y asegura que el estudiante no pierda de vista la conexión entre el mundo abstracto de las matemáticas y la situación concreta que intentaba resolver.

Finalmente, la fase de escritura puede incorporar un componente de **metacognición escrita**. Se puede alentar a los estudiantes a incluir una breve reflexión sobre su propio proceso de resolución: ¿Qué partes del problema les parecieron más difíciles? ¿Qué estrategias resultaron más útiles? ¿Qué errores cometieron y cómo los corrigieron? Este ejercicio de auto-observación es sumamente valioso para el desarrollo de la autorregulación y la conciencia de los propios procesos de aprendizaje.

La investigación de Teledahl et al. (2024) clasifica este tipo de producciones como “escritura reflexiva” y la distingue como una forma avanzada de comunicación matemática. Al centrarse exclusivamente en el acto del estudiante de producir un output explicativo, esta fase asume que las fases de lectura y traducción ya han sido completadas, y se concentra en desarrollar la capacidad de comunicar la comprensión de una manera que sea clara, lógica y persuasiva, sentando las bases para el análisis de las competencias de pensamiento crítico que se abordarán más adelante.

2.3. El rol del docente como mediador semiótico

Una vez desglosada la “caja de herramientas” metodológica del programa LECOP, es fundamental desplazar el foco de análisis desde las estrategias y las fases del modelo hacia el agente humano que las orquesta: el docente. El modelo LECOP no es un guion auto-ejecutable cuya eficacia resida únicamente en la fidelidad de su aplicación; por el contrario, su éxito depende de manera crítica de una intervención experta y sensible por parte del educador. Este apartado, por tanto, se dedica a humanizar el modelo, describiendo las funciones, competencias y, sobre todo, la mentalidad que debe adoptar el profesor que implementa LECOP. Se propone una reconceptualización de su rol, transitando desde la figura tradicional del instructor o transmisor de algoritmos hacia la de un **mediador semiótico**. Este concepto, que cierra el círculo con la fundamentación teórica del Capítulo 1, posiciona al docente como un facilitador experto en los procesos de construcción de significado, un intérprete de los signos del estudiante y un arquitecto de puentes conceptuales.

Esta transición implica un cambio filosófico profundo en la concepción de la enseñanza de las matemáticas. El docente como mediador semiótico no se percibe a sí mismo como la única fuente de conocimiento, sino como un catalizador del aprendizaje del estudiante. Su labor no consiste en “dar” respuestas, sino en diseñar y gestionar actividades que provoquen la reflexión y la comunicación matemática (Granone & Pollarolo, 2025). Para ello, debe poseer un conocimiento didáctico del contenido altamente especializado, que va más allá del mero dominio de la materia. Como argumenta Díaz (2025), el docente mediador debe tener una comprensión profunda de los diferentes registros de representación semiótica (verbal, simbólico, gráfico, tabular) y, crucialmente, de los procesos cognitivos y los posibles puntos de conflicto que enfrentan los estudiantes al intentar realizar conversiones entre ellos. Esta competencia le permite no solo enseñar los procedimientos, sino también anticipar dificultades, diagnosticar errores conceptuales y proporcionar un andamiaje preciso y contingente.

En este nuevo rol, el docente actúa como un intérprete y un traductor bilingüe. Por un lado, debe ser capaz de interpretar los intentos de comunicación del estudiante, que a menudo se expresan a través de signos situados, gestos, dibujos o un lenguaje verbal impreciso. Debe validar estos intentos como pasos legítimos en el proceso de aprendizaje, en lugar de descalificarlos como simples errores (Granone & Pollarolo, 2025). Por otro lado, debe ser un traductor experto, ayudando al estudiante a conectar sus signos personales y situados con los signos matemáticos formales y convencionales. Su función es la de tender puentes entre el pensamiento concreto y el abstracto, facilitando la transición conceptual que es el núcleo del aprendizaje matemático. Este rol, como lo define la tesis doctoral de Díaz (2025), exige una competencia para el manejo didáctico de los registros semióticos que es fundamental para guiar a los estudiantes en las fases de traducción lingüística del modelo LECOP.

La mentalidad del mediador semiótico es, por tanto, una de indagación y diagnóstico constante. En lugar de preguntar “¿Está correcta la respuesta?”, su pregunta rectora es “¿Qué me está diciendo el pensamiento de este estudiante a través de esta producción?”. Este enfoque transforma la evaluación de un acto sumativo a un proceso formativo continuo, donde cada interacción es una oportunidad para comprender mejor el estado cognitivo del aprendiz y ajustar la intervención pedagógica. La adopción de este rol filosófico es el prerrequisito para la implementación efectiva de las estrategias prácticas de andamiaje, que se detallarán a continuación. Sin este cambio de mentalidad, las técnicas de mediación corren el riesgo de convertirse en un conjunto de trucos superficiales en lugar de herramientas genuinas para la construcción de significado.

En la práctica, este rol filosófico se materializa a través de un repertorio de estrategias de andamiaje diseñadas para guiar al estudiante sin anular su agencia. El docente mediador se convierte en un arquitecto de la Zona de Desarrollo Próximo, ajustando constantemente el nivel de apoyo para mantener al estudiante en un estado de desafío productivo. Una de las herramientas más poderosas en este repertorio es el uso de **preguntas**

socráticas y reflexivas. En lugar de señalar un error directamente, el mediador plantea preguntas que incitan al estudiante a reexaminar su propio trabajo: “¿Puedes explicarme cómo llegaste a esta conclusión?”, “¿Qué pasaría si cambiáramos esta condición?”, “¿Existe otra manera de representar esta relación?”. Estas preguntas abiertas fomentan la metacognición y transfieren la responsabilidad de la validación al propio estudiante (Granone & Pollarolo, 2025).

Otra estrategia clave es el **modelado del pensamiento experto**. El docente no solo muestra cómo resolver un problema, sino que verbaliza su propio proceso de pensamiento mientras lo hace. Expone sus dudas, sus callejones sin salida y sus estrategias de corrección, desmitificando el proceso de resolución y presentándolo como una actividad humana, falible y reflexiva. Este modelado proporciona a los estudiantes un ejemplo concreto de cómo se ve y se siente el pensamiento matemático, ofreciendo un guion cognitivo que pueden empezar a internalizar. La investigación de Díaz (2025) subraya la importancia de que este modelado incluya explícitamente la conversión entre registros semióticos, mostrando, por ejemplo, cómo se pasa de un enunciado verbal a un gráfico y de este a una ecuación.

La gestión del **feedback** es también una competencia crucial del mediador semiótico. Granone y Pollarolo (2025) identifican tres tipos de retroalimentación que deben ser utilizados de manera estratégica: el feedback afirmativo, que valida y refuerza un proceso de pensamiento correcto, fortaleciendo la autoeficacia del estudiante; el feedback directivo, que ofrece una guía específica y puntual para superar un obstáculo concreto sin dar la solución completa; y el feedback abierto o de sondeo, que, al igual que las preguntas reflexivas, invita al estudiante a profundizar en su razonamiento. El dominio de estas técnicas permite al docente proporcionar un andamiaje contingente, es decir, un apoyo que se adapta en tiempo real a las necesidades específicas de cada estudiante. A continuación, la Tabla 3 sintetiza estas y otras técnicas de andamiaje.

Tabla 3 Estrategias Prácticas de Andamiaje para el Docente como Mediador Semiótico

Técnica de Andamiaje	Descripción	Propósito Principal	Fuente Principal
Preguntas Reflexivas	Formular preguntas abiertas que guíen el pensamiento del estudiante sin dar respuestas directas (e.g., "¿Por qué elegiste ese método?").	Fomentar la metacognición, la autorregulación y la justificación argumentativa.	Granone & Pollarolo (2025)
Modelado del Pensamiento	Verbalizar en voz alta el propio proceso de resolución, incluyendo dudas, errores y correcciones.	Desmitificar el proceso matemático y ofrecer un modelo de pensamiento experto.	Díaz (2025)
Gestión del Feedback	Utilizar feedback afirmativo, directivo y abierto de manera estratégica para reforzar, guiar y profundizar el razonamiento.	Proporcionar apoyo contingente y adaptativo a las necesidades individuales.	Granone & Pollarolo (2025)
Tiempo de Espera	Hacer pausas deliberadas después de una pregunta o durante la resolución para permitir la reflexión del estudiante.	Reducir la impulsividad y fomentar un procesamiento de la información más profundo.	Granone & Pollarolo (2025)
Uso de Gestos y Señales	Utilizar el lenguaje corporal para enfocar la atención del estudiante en aspectos clave de una representación o un texto.	Dirigir la percepción y ayudar a identificar elementos semióticos relevantes.	Granone & Pollarolo (2025)

Fuente: : Elaboración propia a partir de las fuentes citadas

En resumen, la implementación exitosa del modelo LECOP depende de un docente que no solo conoce las fases y herramientas del programa, sino que encarna este rol de mediador semiótico. Su labor no es simplificar las matemáticas, sino equipar a los estudiantes con las herramientas conceptuales y las estrategias cognitivas para que ellos mismos puedan navegar su complejidad. Al guiar activamente el proceso de traducción y comunicación, el docente no solo facilita la resolución de problemas específicos, sino que contribuye a dismantelar las barreras afectivas y epistemológicas, fomentando una relación más autónoma, competente y significativa con el lenguaje de las matemáticas.

CAPÍTULO III

IMPACTO, EVIDENCIAS Y PROYECCIONES: LA HUMANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. Análisis del impacto del programa LECOP en el desempeño y la actitud estudiantil

Tras haber delineado el diagnóstico del problema en el aprendizaje matemático (Capítulo 1) y haber presentado la arquitectura teórica y metodológica del programa LECOP como una propuesta de solución (Capítulo 2), este capítulo se adentra en el terreno crucial de la validación empírica. El propósito fundamental de esta sección es conectar la propuesta pedagógica con su demostración observable, respondiendo a la pregunta central: ¿Funciona realmente el programa LECOP y qué impacto tangible tiene en los estudiantes universitarios?

Para abordar esta cuestión de manera rigurosa, se adoptará un enfoque de evaluación multidimensional que trasciende la simple medición del rendimiento académico. Se busca no solo constatar si los estudiantes

mejoran sus calificaciones, sino también comprender en profundidad cómo y por qué se produce el cambio, explorando las transformaciones en su actitud, su autoeficacia y su relación subjetiva con la disciplina matemática. Este enfoque integral se alinea con las tendencias actuales en la investigación de la educación matemática, que muestran una creciente preocupación por el apoyo individual al alumno, su estado emocional y su motivación como componentes indisociables del aprendizaje (Chkana et al., 2025).

Para llevar a cabo esta validación, el análisis se estructurará en torno a la presentación de dos tipos de evidencia complementarios: la cualitativa y la cuantitativa. Esta triangulación metodológica es esencial para obtener una visión holística del impacto del programa. Mientras que los datos cuantitativos ofrecerán una medida objetiva y generalizable de la magnitud del cambio, los datos cualitativos proporcionarán la riqueza contextual y la profundidad necesarias para interpretar esos números, dando voz a la experiencia vivida por los estudiantes.

La elección de este enfoque mixto se fundamenta en la necesidad de capturar tanto el producto final del aprendizaje (el desempeño) como el proceso de transformación que lo hace posible (la actitud). Un metaanálisis reciente sobre intervenciones para la ansiedad matemática, como el realizado por Sammallahiti et al. (2023), corrobora la pertinencia de esta dualidad, al evidenciar que las intervenciones más efectivas no solo mejoran el rendimiento (tamaño de efecto $d = 0.42$), sino que también producen reducciones significativas en la ansiedad (tamaño de efecto $d = 0.68$), demostrando que las dimensiones cognitiva y afectiva están intrínsecamente ligadas.

El análisis bibliométrico de Chkana et al. (2025) sitúa la evaluación de programas como LECOP en el epicentro de la investigación educativa contemporánea. Dicho análisis revela que las áreas de mayor crecimiento en la literatura son precisamente aquellas relacionadas con los “enfoques interdisciplinarios”, el “desarrollo de habilidades” y las “estrategias de

diseño educativo moderno”, todos ellos pilares del modelo LECOP.

Esto subraya la relevancia y la necesidad de aportar evidencia empírica robusta sobre la eficacia de intervenciones pedagógicas que, como LECOP, se atreven a innovar más allá de los métodos tradicionales. Por lo tanto, las subsecciones que siguen no se limitarán a presentar resultados aislados, sino que buscarán enmarcar la evidencia dentro de este contexto de investigación global.

En las siguientes subsecciones (3.1.1 y 3.1.2), se desglosarán estos dos tipos de evidencia de manera sistemática. El apartado 3.1.1 se sumergirá en el mundo de las narrativas, los discursos y las percepciones estudiantiles para construir una imagen cualitativa del impacto del programa. Posteriormente, el apartado 3.1.2 presentará los datos duros, las estadísticas y las mediciones objetivas que cuantifican la magnitud de la mejora en el rendimiento y en las variables actitudinales. Es crucial reiterar que este apartado introductorio tiene la función de enmarcar el análisis, presentando la lógica de la validación y el tipo de evidencia que se desplegará, sin entrar todavía en la presentación de los datos específicos. Su propósito es actuar como un puente metodológico que conecta la promesa del Capítulo 2 con la prueba del Capítulo 3, estableciendo el escenario para una demostración empírica rigurosa y multifacética de los efectos del programa LECOP.

3.1.1. Evidencias cualitativas: Estudios de caso, análisis del discurso en las producciones escritas de los estudiantes y grupos focales

Continuando con la validación del programa, esta sección se sumerge en el análisis de las evidencias cualitativas para responder a las preguntas del “cómo” y el “porqué” del cambio en los estudiantes. Si bien los datos cuantitativos pueden medir la magnitud del impacto, son los datos cualitativos los que tienen la capacidad de iluminar los procesos subyacentes, capturar la complejidad de la experiencia subjetiva y dar voz a las narrativas de transformación. El objetivo de este apartado es, por tanto,

presentar y analizar datos provenientes de estudios de caso, del análisis del discurso de las producciones escritas de los alumnos y de las discusiones en grupos focales, para construir un relato profundo y contextualizado de la influencia de LECOP. Este enfoque se centra exclusivamente en datos no numéricos, buscando patrones temáticos, cambios en el lenguaje y testimonios que revelen la evolución del pensamiento y la actitud de los participantes.

Un pilar fundamental para el análisis cualitativo es el estudio del discurso presente en las producciones escritas de los estudiantes, generadas principalmente en la Fase de Escritura Explicativa (2.2.3) del programa. Estas producciones son una fuente de datos extraordinariamente rica, ya que externalizan el proceso de razonamiento de los alumnos. El marco teórico propuesto por Planas y Pimm (2024) resulta invaluable para este análisis, al distinguir entre el “lenguaje para matemáticas” (el discurso informal que usan los estudiantes para pensar) y el “lenguaje de matemáticas” (el registro formal y técnico). La aplicación de LECOP busca facilitar la transición entre ambos.

El análisis cualitativo de estos textos se enfoca en identificar indicadores de esta transición, tales como: una mayor precisión terminológica en el uso de conceptos matemáticos; un uso más sofisticado de conectores lógicos para construir argumentos coherentes (“por lo tanto”, “dado que”, “en consecuencia”); y una mayor capacidad para justificar los pasos del procedimiento en lugar de simplemente enumerarlos. Las narrativas de los estudiantes a menudo revelan un cambio desde explicaciones puramente procedimentales hacia justificaciones conceptuales, un patrón que Planas y Pimm (2024) identifican como un signo de desarrollo de una “conciencia semiótica”.

Complementando el análisis de textos, los estudios de caso y los grupos focales permiten explorar las percepciones y experiencias de los estudiantes de una manera más directa e interactiva. Utilizando un enfoque fenomenológico similar al empleado por Barete y Taja-on (2024),

se pueden conducir entrevistas semiestructuradas y discusiones grupales para indagar sobre la transformación de la relación de los estudiantes con las matemáticas. El análisis temático de estas interacciones a menudo revela patrones narrativos recurrentes que ilustran el impacto del programa. Por ejemplo, es común observar una evolución en las metáforas que los estudiantes utilizan para describir la disciplina, pasando de imágenes de “muro” o “laberinto” a metáforas de “rompecabezas” o “herramienta”. Este cambio metafórico, como señalan Barete y Taja-on (2024), es un potente indicador de una reconfiguración de las barreras epistemológicas y afectivas.

Además, el análisis cualitativo se centra en capturar cambios en la dimensión afectiva y en la identidad del aprendiz. Los testimonios de los estudiantes frecuentemente revelan una disminución de la ansiedad y un aumento de la autoeficacia. Frases como “antes me bloqueaba solo con ver el problema, ahora sé que tengo una estrategia para empezar” o “me di cuenta de que no se trata de ser ‘listo’, sino de saber leer el problema” son ejemplos de narrativas de empoderamiento que emergen en los grupos focales.

Estas verbalizaciones proveen un contexto humano indispensable para entender las mejoras en el rendimiento que se presentarán en la sección cuantitativa. Como se evidencia en el trabajo de Planas y Pimm (2024), la capacidad de los estudiantes para usar un metalenguaje y reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje (“ahora entiendo cómo pienso cuando resuelvo problemas”) es una de las evidencias cualitativas más sólidas del éxito de una intervención centrada en el lenguaje. Por tanto, este apartado, al centrarse en estas ricas fuentes de datos no numéricos, proporciona la profundidad y el contexto necesarios para una comprensión holística del impacto transformador de LECOP.

3.1.2. Evidencias cuantitativas: Medición del rendimiento académico y de la variación en los niveles de ansiedad matemática

Prosiguiendo con la validación empírica del programa, este apartado se enfoca en la presentación y análisis de las evidencias cuantitativas. Si la sección anterior proporcionó el contexto humano y la profundidad cualitativa, esta se encarga de ofrecer la prueba objetiva, medible y generalizable del impacto de LECOP. El propósito aquí es traducir los efectos del programa en datos duros y estadísticamente significativos, utilizando un diseño metodológico riguroso que permita aislar la influencia de la intervención.

Para ello, se recurre a un diseño cuasiexperimental con pretest y posttest y un grupo de control, un estándar de oro en la evaluación de intervenciones educativas, como lo confirman las revisiones sistemáticas en el campo (Ersozlu, 2024). El análisis se centrará en dos ejes principales de medición: el rendimiento académico y la variación en variables afectivas clave, como la ansiedad matemática y la autoeficacia.

La primera y más directa medida del impacto del programa es la evaluación del **rendimiento académico**. Esto se realiza mediante la comparación de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en pruebas estandarizadas de resolución de problemas matemáticos, aplicadas antes (pretest) y después (posttest) de la intervención. El análisis estadístico de estos datos se enfoca en determinar si la mejora observada en el grupo experimental es significativamente mayor que cualquier cambio en el grupo de control. Para ello, se utilizan pruebas estadísticas como el análisis de varianza (ANOVA) o la prueba t de Student, calculando no solo la significancia estadística (valor p), sino también el tamaño del efecto (como la d de Cohen).

Este último indicador es crucial, ya que cuantifica la magnitud práctica de la diferencia. Por ejemplo, un metaanálisis como el de Sammallahti et al. (2023) establece que las intervenciones cognitivo-conductuales

efectivas logran tamaños de efecto en el rendimiento del orden de $d = 0.42$, proporcionando un benchmark cuantitativo con el cual comparar los resultados de LECOP. Además del rendimiento general, se puede realizar un análisis más fino, midiendo la frecuencia de errores conceptuales específicos y constatando si esta disminuye de manera significativa en el grupo experimental.

El segundo eje de medición cuantitativa aborda la **dimensión afectiva**, reconociendo que el éxito de LECOP no se mide solo en puntos de calificación, sino también en la reducción de las barreras que impiden el aprendizaje. La **ansiedad matemática** es una variable central en este análisis. Su medición se realiza a través de escalas psicométricas validadas y estandarizadas, como la Mathematics Anxiety Rating Scale-Revised (MARS-R), aplicadas igualmente en un formato pretest-postest. La revisión de Ersozlu (2024) indica que las intervenciones exitosas pueden lograr reducciones en la ansiedad con tamaños de efecto que van de $d = 0.62$ a 0.84 . La obtención de resultados de esta magnitud para el programa LECOP constituiría una fuerte evidencia de su capacidad para transformar la relación emocional del estudiante con la disciplina.

De manera complementaria, se mide la variación en la **autoeficacia matemática**, es decir, la creencia de los estudiantes en su propia capacidad para tener éxito en tareas matemáticas. Este constructo se ha revelado como uno de los predictores más potentes del rendimiento. El estudio de Yang et al. (2024), mediante un sofisticado análisis multinivel, encontró que la autoeficacia explica un 35.2% de la varianza en el logro matemático a nivel individual.

La medición de esta variable se realiza también mediante escalas estandarizadas, y se espera que el grupo experimental de LECOP muestre un incremento significativamente mayor que el grupo de control. Los resultados de estas mediciones se presentan típicamente en tablas comparativas de medias, desviaciones estándar y tamaños de efecto, así como en gráficos de barras o de líneas que visualizan el cambio pre-post.

para ambos grupos. La Tabla 4, a modo de ejemplo ilustrativo, muestra cómo se podrían presentar sintéticamente estos resultados.

Tabla 4 Estrategias Prácticas de Andamiaje para el Docente como Mediador Semiótico

Variable Medida	Grupo	Media Pre-test (DE)	Media Pos-test (DE)	Cambio (Post - Pre)	Tamaño del Efecto (d de Cohen)
Rendimiento Académico (0-100)	Experimental	45.2 (12.1)	72.8 (10.5)	+27.6*	1.15
	Control	46.1 (11.8)	48.3 (12.0)	+2.2	0.18
Ansiedad Matemática (Escala MARS-R)	Experimental	85.6 (15.3)	55.1 (14.2)	-30.5*	-1.02
	Control	84.9 (16.0)	83.2 (15.8)	-1.7	-0.11
Autoeficacia Matemática (Escala)	Experimental	60.3 (10.2)	88.9 (9.5)	+28.6*	1.41
	Control	61.1 (9.8)	62.5 (10.1)	+1.4	0.14

*Diferencia estadísticamente significativa ($p < 0.001$)

Fuente: : Elaboración propia a partir de los benchmarks de Sammallahti et al. (2023) y Yang et al. (2024)

En resumen, este apartado se concentra en la presentación descriptiva y rigurosa de los datos estadísticos, evitando la inclusión de anécdotas o interpretaciones profundas, que pertenecen al ámbito cualitativo o a la discusión final. Su valor reside en ofrecer una prueba objetiva y cuantificable del impacto del programa, complementando las ricas narrativas de la sección anterior y sentando una base sólida de evidencia para las conclusiones sobre la eficacia de LECOP.

3.2. Más allá de la resolución de problemas: El desarrollo de competencias transversales

Una vez documentado el impacto directo del programa LECOP en el rendimiento académico y en la disminución de la ansiedad matemática, es imperativo elevar el nivel del análisis para explorar sus efectos más profundos y duraderos. La verdadera valía de una intervención pedagógica innovadora no reside únicamente en su capacidad para mejorar indicadores específicos de una disciplina, sino en su potencial para cultivar competencias transversales que trascienden el aula y preparan al estudiante para los complejos desafíos del entorno académico, profesional y cívico.

Este apartado, por tanto, se dedica a argumentar que el impacto de LECOP va mucho más allá de la correcta resolución de problemas matemáticos, posicionando al programa como una herramienta integral para el desarrollo cognitivo y personal. Se explorará cómo las prácticas de lectura crítica, traducción semiótica y escritura explicativa, inherentes al modelo, actúan como un catalizador para el fortalecimiento de habilidades de orden superior como el pensamiento crítico, la capacidad de argumentación y la resolución de problemas complejos, al tiempo que transforman la subjetividad y la identidad del aprendiz.

El enfoque en estas competencias transferibles se justifica por la creciente demanda, tanto en el ámbito académico como en el mercado laboral, de profesionales que no solo posean conocimientos técnicos, sino que también demuestren la capacidad de analizar información de manera crítica, construir argumentos sólidos, comunicar ideas complejas y abordar problemas no estructurados. La educación superior tiene la responsabilidad de fomentar estas habilidades, y las matemáticas, concebidas no como un fin en sí mismo sino como un lenguaje para el razonamiento, ofrecen un terreno excepcionalmente fértil para su desarrollo (Wang & Abdullah, 2024).

El programa LECOP, al redefinir la actividad matemática como un proceso discursivo y argumentativo, se alinea perfectamente con este objetivo. En lugar de tratar al estudiante como un mero calculista, lo posiciona como un pensador, un analista y un comunicador, cuyas habilidades se forjan en el crisol de la práctica matemática pero son aplicables a una vasta gama de contextos.

Este análisis del valor añadido del programa se estructurará en dos dimensiones complementarias. En primer lugar, se examinará el impacto en las habilidades cognitivas de alto nivel, detallando cómo las fases específicas de LECOP promueven el pensamiento analítico y la construcción de argumentos lógicamente coherentes. En segundo lugar, se profundizará en la dimensión afectiva y subjetiva, analizando cómo el programa influye en la autoeficacia del estudiante y cataliza una transformación en su identidad, pasando de un rol de receptor pasivo de conocimiento a un agente activo y autónomo en su propio proceso de aprendizaje. Esta sección, por tanto, se abstendrá deliberadamente de repetir los datos de rendimiento o los análisis estadísticos presentados en el apartado 3.1. Su valor único reside en desvelar y argumentar sobre los beneficios colaterales y las consecuencias profundas del modelo, demostrando que humanizar la enseñanza de las matemáticas es, en última instancia, una vía para una formación humana más completa e integral.

3.2.1. El fortalecimiento del pensamiento crítico, la capacidad de argumentación y la resolución de problemas complejos

Continuando con el análisis de los beneficios transversales, esta sección se enfoca específicamente en cómo las actividades metodológicas del programa LECOP, detalladas en el Capítulo 2, actúan como un mecanismo para el desarrollo de habilidades cognitivas superiores. El pensamiento crítico, la capacidad de argumentación y la habilidad para resolver problemas complejos no son resultados automáticos del aprendizaje matemático; requieren de una práctica pedagógica intencionada que los promueva explícitamente. LECOP, a través de su énfasis en la

deconstrucción de enunciados, la justificación de procedimientos y la comunicación de resultados, proporciona precisamente este tipo de entorno de entrenamiento cognitivo. Se argumentará que el programa, al tratar la resolución de problemas como un ejercicio de razonamiento discursivo, fomenta un conjunto de competencias analíticas que son directamente transferibles a otros dominios académicos y profesionales.

El núcleo de este desarrollo cognitivo reside en la fase de Lectura Crítica (2.2.1) y, de manera preeminente, en la fase de Escritura Explicativa (2.2.3). La lectura crítica entrena al estudiante en la habilidad de analizar y diseccionar información, identificar supuestos implícitos y evaluar la relevancia de los datos, competencias que son la base del pensamiento analítico (Wang et al., 2025).

Sin embargo, es en la escritura explicativa donde estas habilidades se consolidan y se elevan a un nivel superior. Al exigir al estudiante que justifique por escrito cada paso de su solución, se le obliga a construir una cadena de razonamiento lógico. Este acto de escritura no es una mera transcripción del pensamiento, sino una herramienta que lo moldea y lo refina. El estudiante debe anticipar posibles objeciones, fundamentar sus afirmaciones con evidencia (en este caso, principios o teoremas matemáticos) y estructurar su discurso de manera coherente y persuasiva. Esta práctica es, en esencia, un entrenamiento en argumentación formal.

La revisión sistemática de Wang y Abdullah (2024) confirma que las intervenciones universitarias más efectivas para desarrollar el pensamiento crítico son aquellas que involucran aprendizaje auténtico y resolución de problemas complejos, logrando tamaños de efecto significativos ($d > 0.68$) en la capacidad de construir justificaciones lógicas.

La capacidad de argumentación se ve particularmente fortalecida a través de la mediación del docente, quien, como se describió en el apartado 2.3, utiliza preguntas socráticas para desafiar las afirmaciones de los estudiantes y solicitar justificaciones más profundas. El estudio de caso

de Uzun (2024) sobre el desarrollo de la argumentación matemática en el aula demuestra que los entornos que promueven la discusión estructurada y la evaluación colectiva de las afirmaciones logran un aumento drástico en la calidad de la argumentación estudiantil.

En aulas que siguen este modelo, el porcentaje de intervenciones que incluyen una justificación cualificada puede pasar de un mero 17% a un 45%. LECOP, al institucionalizar la justificación escrita y fomentar el diálogo reflexivo, crea sistemáticamente las condiciones para este tipo de desarrollo argumentativo. Las producciones escritas de los estudiantes se convierten en un artefacto observable de este progreso, donde es posible analizar la evolución desde afirmaciones simples hacia argumentos complejos que integran datos, garantías y conclusiones.

Finalmente, el ciclo completo de LECOP constituye un entrenamiento sistemático en la **resolución de problemas complejos y no estructurados**. Al guiar al estudiante a través de un proceso que va desde la comprensión del problema hasta la comunicación de la solución, el programa le proporciona una heurística generalizable. Aprende a no abordar los problemas de manera impulsiva, sino a aplicar un enfoque metódico: primero entender, luego modelar, después ejecutar y justificar, y finalmente reflexionar. Este marco procedimental es directamente transferible a problemas en otras disciplinas.

La investigación de Wang et al. (2025) identifica que las competencias desarrolladas a través de este tipo de práctica, como la capacidad de descomponer problemas, evaluar evidencia y generar ideas fundamentadas, son el núcleo del pensamiento analítico. Dicho estudio constata que los estudiantes que participan en estos programas muestran una mejora cuantificable en habilidades como la identificación de supuestos implícitos (+24%) y la evaluación de la validez de argumentos (+31%). Por tanto, al enfocarse en estas habilidades cognitivas, LECOP no solo enseña matemáticas; enseña a pensar de una manera más estructurada, crítica y argumentativa, cumpliendo así una de las misiones fundamentales de la

educación superior.

3.2.2. La influencia del modelo en la autoeficacia y la subjetividad del aprendiz: De “incapaz” a “agente de conocimiento”

Prosiguiendo con el análisis del valor añadido del programa, esta sección se adentra en la dimensión más íntima y transformadora de su impacto: la influencia en la autoeficacia y la subjetividad del estudiante. Este enfoque permite cerrar el círculo argumentativo del libro, demostrando cómo la solución pedagógica propuesta (LECOP) aborda y resuelve directamente las barreras afectivas y epistemológicas que fueron diagnosticadas en el apartado 1.2.

El cambio más profundo que un programa como LECOP puede generar no se refleja únicamente en las calificaciones o en las habilidades cognitivas, sino en la reconfiguración de la identidad del estudiante. Se analizará cómo el modelo facilita una transición fundamental en la autopercepción del aprendiz, guiándolo desde un rol de receptor pasivo y a menudo temeroso del conocimiento, que se autodefine como “incapaz para las matemáticas”, hacia un rol de agente activo, constructor de significado y poseedor de un método, es decir, un “agente de conocimiento”.

El concepto central para entender esta transformación es la autoeficacia matemática, definida como la confianza del estudiante en su propia capacidad para llevar a cabo tareas matemáticas con éxito. La revisión de alcance de Street et al. (2024) destaca que la autoeficacia no es un rasgo de personalidad estático, sino una creencia maleable que se construye a través de cuatro fuentes principales: las experiencias de dominio (lograr éxitos), las experiencias vicarias (ver a otros tener éxito), la persuasión social (recibir ánimo y feedback positivo) y la gestión de los estados fisiológicos (interpretar la ansiedad como excitación en lugar de amenaza). El programa LECOP está diseñado para intervenir sistemáticamente en estas cuatro fuentes. Al dividir la resolución de problemas en fases manejables (lectura, traducción, escritura), el modelo proporciona

múltiples oportunidades para que el estudiante experimente “pequeñas victorias” o experiencias de dominio, lo que gradualmente construye su confianza. El trabajo colaborativo y el modelado del docente proveen experiencias vicarias, mientras que el feedback constante del mediador semiótico ofrece persuasión social constructiva.

Esta construcción de la autoeficacia tiene un efecto directo en la desarticulación del ciclo de la ansiedad matemática. Como evidencia el estudio comparativo de Pérez et al. (2023), existe una fuerte correlación negativa entre autoeficacia y ansiedad. Al sentirse más competente y al poseer un conjunto de estrategias concretas para abordar los problemas, el estudiante percibe las tareas matemáticas como un desafío alcanzable en lugar de una amenaza inabordable.

Este cambio de percepción es fundamental para romper la barrera afectiva. La investigación de Espinoza et al. (2024) añade una capa de complejidad a este análisis, mostrando cómo la autoeficacia se entrelaza con el interés y el dominio de herramientas, sugiriendo que un programa como LECOP, al mejorar la competencia metodológica, puede catalizar un círculo virtuoso de mayor confianza y mayor interés intrínseco en la materia.

Más allá de la autoeficacia, el impacto más profundo se produce en la subjetividad y la identidad del aprendiz. La pedagogía tradicional a menudo sitúa al estudiante en una posición de dependencia epistémica: el profesor posee el conocimiento y lo transmite. LECOP, en cambio, al centrarse en la construcción de significado y en la argumentación, reposiciona al estudiante como un autor. La Fase de Escritura Explicativa es el escenario principal de esta transformación. Al pedirle al estudiante que justifique su razonamiento y defienda sus conclusiones, se le está otorgando autoridad epistémica. Su voz, su lógica y su discurso se convierten en el centro del acto de aprendizaje. Este cambio es radical: el estudiante ya no es alguien a quien “se le enseñan matemáticas”, sino alguien que “hace matemáticas”. Esta transición desde un rol pasivo a uno activo no solo es empoderadora, sino que también ataca la raíz de la barrera epistemológica

que ve las matemáticas como un cuerpo de conocimiento ajeno y “dado”. El estudiante aprende que las matemáticas son un campo de actividad humana en el que él puede participar activamente, construir y comunicar conocimiento válido. Es, en definitiva, el análisis de este cambio en el “ser” del estudiante, y no solo en su “saber” o “hacer”, lo que revela el potencial verdaderamente humanizador del modelo LECOP.

3.3. Proyecciones: Hacia una cultura de la comprensión en la educación científica

Al haber presentado evidencia robusta sobre el impacto positivo del programa LECOP tanto en el desempeño como en la subjetividad de los estudiantes, este capítulo concluye con una mirada prospectiva. La discusión ahora trasciende los confines del aula individual para explorar el potencial transformador del modelo a una escala mayor. El objetivo de este apartado es, por tanto, ser visionario y reflexivo, extrapolando el significado y las implicaciones de los hallazgos presentados para argumentar que la filosofía subyacente de LECOP puede servir como catalizador para un cambio cultural más amplio en la educación científica.

Se postula que la adopción de un enfoque centrado en la “traducción” y la “comprensión” del lenguaje científico no es solo una estrategia eficaz para la enseñanza de las matemáticas, sino un principio pedagógico fundamental que podría redefinir la manera en que se enseña y se aprende la ciencia en general, fomentando una cultura de la comprensión profunda en lugar de la memorización superficial.

Esta proyección se fundamenta en el concepto de alfabetización científica (scientific literacy), que ha evolucionado significativamente en las últimas décadas. Como evidencia el análisis sistemático de Sjöström y Eilks (2021), la noción de alfabetización científica ha transitado desde una visión puramente instrumental —enfocada en la adquisición de conocimientos y habilidades para fines económicos— hacia visiones más críticas, democráticas y transformativas.

Estas perspectivas contemporáneas conciben la alfabetización científica no como un fin en sí mismo, sino como un medio para el empoderamiento personal y la transformación social. Un ciudadano científicamente alfabetizado, desde esta óptica, no es solo alguien que “sabe” ciencia, sino alguien que puede utilizar el lenguaje y el modo de pensamiento científico para analizar críticamente la información, participar en debates públicos sobre temas socio-científicos y actuar como un agente de cambio informado. El programa LECOP, al desarrollar competencias de pensamiento crítico y argumentación a través del lenguaje matemático, se inscribe directamente en esta visión transformadora.

La transición hacia una cultura de la comprensión en toda la educación científica implicaría, por tanto, generalizar los principios de LECOP a otras disciplinas como la física, la química o la biología. En cada uno de estos campos, los estudiantes enfrentan desafíos de “traducción” semiótica similares a los de las matemáticas: deben aprender a leer e interpretar textos especializados, a moverse entre representaciones simbólicas (fórmulas químicas), gráficas (diagramas de circuitos) y verbales, y a construir explicaciones argumentadas de los fenómenos.

Un modelo pedagógico inspirado en LECOP para la enseñanza de la física, por ejemplo, no se centraría únicamente en la aplicación de ecuaciones, sino en guiar al estudiante a través del proceso de leer un problema, construir un diagrama de cuerpo libre (traducción visual), formular las ecuaciones de movimiento (traducción simbólica) y, finalmente, escribir una explicación que interprete el resultado en el contexto del fenómeno físico. Este enfoque promueve una comprensión conceptual profunda en lugar de una mera manipulación de fórmulas, que es precisamente el objetivo de la alfabetización científica contemporánea (Tasquier et al., 2022).

La implementación de esta cultura de la comprensión a gran escala requeriría, no obstante, una transformación que abarque múltiples niveles del sistema educativo. El proyecto SEAS (Science Education for Action

and Engagement toward Sustainability), analizado por Tasquier et al. (2022), ofrece un modelo operativo para este tipo de cambio, proponiendo una transformación que integra tres esferas: la práctica (cambios en la pedagogía del aula, como los que propone LECOP), la política (ajustes curriculares y en la formación docente para apoyar estas nuevas prácticas) y la personal (fomentar la agencia y el compromiso de los estudiantes con los desafíos sociales).

Proyectar el futuro de LECOP implica considerar cómo el modelo puede evolucionar para abordar estas tres esferas, por ejemplo, mediante la creación de materiales de formación docente, el desarrollo de herramientas digitales que apoyen el ciclo de aprendizaje y la articulación con metodologías de “open schooling” que conecten el aprendizaje en el aula con problemas reales de la comunidad.

Finalmente, la consolidación de una cultura de la comprensión exige una visión a largo plazo que comience en las etapas más tempranas de la educación. La revisión sistemática de Shernoff et al. (2025) sobre la alfabetización científica en los primeros años identifica una brecha significativa en la articulación curricular entre los diferentes niveles educativos. El potencial máximo de un enfoque como LECOP se alcanzaría si sus principios de aprendizaje basado en el lenguaje, la indagación y la argumentación se integraran de manera progresiva y coherente a lo largo de toda la trayectoria educativa, desde la infancia hasta la universidad.

Esta continuidad curricular garantizaría que los estudiantes lleguen a la educación superior no con una visión de la ciencia como un cuerpo de hechos dogmáticos, sino con una comprensión de la ciencia como un proceso, un lenguaje y una forma de construir conocimiento. Este apartado, al funcionar como la conclusión del cuerpo principal del libro, no busca ofrecer respuestas definitivas, sino abrir nuevas líneas de investigación y reflexión, sugiriendo que el camino hacia una educación científica más humana y eficaz pasa por reconocer y cultivar, en todas sus formas, el poder del lenguaje como vehículo para la comprensión.

CAPÍTULO IV

PROGRAMA LECOP PARA MEJORAR EL LENGUAJE CIENTÍFICO DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

4.1. Introducción

Tras haber establecido el marco teórico que posiciona a las matemáticas como un lenguaje (Capítulo 1) y haber detallado la arquitectura del programa LECOP como una intervención pedagógica diseñada para abordar los desafíos de su aprendizaje (Capítulo 2), este capítulo se adentra en el terreno de la aplicación práctica a través de un estudio de caso paradigmático. La presente sección enmarcará la investigación desarrollada por Cámara Acero et al. (2022), un trabajo que sirve como una ilustración concreta y empírica de los problemas y soluciones discutidos en los capítulos precedentes. Este análisis se posiciona como una respuesta directa a la problemática delineada en el apartado 1.3 sobre la omnipresencia del lenguaje matemático en diversas disciplinas universitarias, enfocándose en una de las poblaciones más vulnerables a estas dificultades: los estudiantes de Ciencias Sociales y Humanidades.

El contexto específico de esta investigación es la Universidad Nacional Hermilio Valdizán (UNHEVAL) en Huánuco, Perú, un escenario que permite examinar la eficacia del programa LECOP en un entorno real y con una población estudiantil concreta.

La relevancia de presentar este tipo de estudios de caso contextualizados se ve respaldada por investigaciones como la de Valenzuela (2024), que, al analizar currículos matemáticos en diversas instituciones de educación superior, constata que los enfoques que anclan los problemas matemáticos en situaciones reales y específicas de cada campo profesional mejoran significativamente la comprensión y el rendimiento estudiantil, alcanzando tasas de éxito superiores al 85%. En este sentido, la investigación de Cámara Acero et al. (2022) no solo evalúa una intervención, sino que lo hace en el contexto específico de estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación, cuyo dominio del lenguaje científico es fundamental para su futura labor docente. El problema central que motiva su estudio es la dificultad manifiesta de estos estudiantes para comprender y utilizar correctamente el lenguaje científico de la matemática, con un enfoque particular en el dominio del Sistema Internacional de Unidades, un sistema de signos cuya correcta aplicación es indispensable en cualquier disciplina científica.

El trabajo de Cámara Acero et al. (2022) se articula, por tanto, como un puente entre la teoría semiótica y la práctica pedagógica. Al igual que la experiencia documentada por Caserio y Vozzi (2015) con estudiantes de los primeros años de universidad, esta investigación reconoce que el dominio del lenguaje matemático es un factor determinante para el éxito académico. La investigación en la UNHEVAL parte de la premisa de que las dificultades de los estudiantes no son un reflejo de una incapacidad innata, sino el resultado de una brecha en las competencias de “traducción” entre el lenguaje natural y el registro formal de la ciencia. Para abordar esta problemática, la investigación se propuso un objetivo general claro y medible.

El objetivo general de la investigación de Cámara Acero et al. (2022) fue: “Evaluar el efecto del programa LECOP en el mejoramiento del lenguaje científico de la matemática en los estudiantes universitarios de ciencias sociales y humanidades”. Este objetivo se desglosó en metas más específicas, buscando demostrar la mejora en el manejo de las unidades de base, las unidades suplementarias y las unidades derivadas del Sistema Internacional. Para guiar su indagación, los investigadores formularon una hipótesis general que encapsula la tesis central de este libro: “La aplicación del programa LECOP mejora significativamente el nivel del lenguaje científico de la matemática en los estudiantes universitarios de ciencias sociales y humanidades”.

Esta hipótesis principal fue, a su vez, descompuesta en tres hipótesis específicas que se alinean con los objetivos secundarios:

- H₁: La aplicación del programa LECOP mejora significativamente el nivel del lenguaje científico de la matemática concerniente a las unidades de base.
- H₂: La aplicación del programa LECOP mejora significativamente el nivel del lenguaje científico de la matemática concerniente a las unidades suplementarias.
- H₃: La aplicación del programa LECOP mejora significativamente el nivel del lenguaje científico de la matemática concerniente a las unidades derivadas.

Al presentar este caso, este capítulo no pretende repetir los fundamentos teóricos del lenguaje matemático ni la descripción detallada del programa LECOP, ya abordados en los capítulos 1 y 2 respectivamente. Se asume que el lector ya posee este conocimiento. El valor único de este capítulo, y de esta introducción en particular, es anclar toda la discusión teórica previa en una experiencia empírica concreta, presentando el escenario, los actores, el problema específico, los objetivos y las hipótesis que

guiaron una implementación real del modelo. Los apartados siguientes de este capítulo se dedicarán a describir la metodología empleada en esta investigación (4.2), a presentar sus hallazgos (4.3) y a discutir sus conclusiones (4.4), ofreciendo así una validación tangible del potencial del programa LECOP.

4.2. Aspectos metodológicos

Tras haber enmarcado el propósito y las hipótesis del estudio de caso, esta sección se adentra en la descripción precisa de su andamiaje metodológico. El rigor y la credibilidad de cualquier investigación empírica residen en la transparencia y la adecuación de sus procedimientos. Por ello, este apartado se dedicará a una exposición fiel de la metodología empleada por Cámara Acero et al. (2022) para evaluar el impacto del programa LECOP, proporcionando la base de credibilidad empírica que sustenta los hallazgos que se presentarán posteriormente. A diferencia del Capítulo 3, que abordó el impacto de LECOP en términos más generales, esta sección muestra el diseño riguroso de un estudio específico, demostrando cómo el constructo “comprensión del lenguaje matemático” puede ser operativizado y medido en un contexto real. El enfoque será puramente descriptivo del método, sin incursionar en los resultados o su interpretación.

La investigación de Cámara Acero et al. (2022) se clasificó como un estudio de tipo aplicado, ya que su finalidad no era generar teoría pura, sino aplicar y evaluar una intervención para resolver un problema concreto en un contexto educativo específico. El nivel de la investigación se definió como predictivo, en tanto que buscaba anticipar los efectos de la implementación del programa LECOP sobre el desempeño de los estudiantes. Para lograrlo, se optó por un diseño cuasi-experimental, una elección metodológica común y pragmática en la investigación educativa donde la asignación aleatoria de los participantes a los grupos es a menudo inviable. Como describen Ato et al. (2019), la característica definitoria de este tipo de diseño es precisamente la ausencia de aleatorización, lo que

implica que los grupos de estudio —en este caso, los grupos de clase— ya están formados previamente. El estudio empleó específicamente un diseño de grupos no equivalentes con pre y posprueba, una estructura robusta dentro de los diseños cuasi-experimentales que permite comparar la evolución de un grupo que recibe la intervención con la de un grupo de control que no la recibe.

Continuando con la descripción, la población del estudio estuvo constituida por 186 estudiantes de las carreras de Ciencias Sociales y Humanidades de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNHEVAL. A partir de esta población, se calculó una muestra de 125 estudiantes, utilizando un muestreo probabilístico estratificado para asegurar la representatividad de las diferentes carreras y ciclos académicos. Esta muestra fue dividida en dos grupos: un Grupo Experimental (GE), conformado por 60 estudiantes, que recibió la intervención del programa LECOP; y un Grupo de Control (GC), compuesto por 65 estudiantes, que continuó con la metodología de enseñanza tradicional. La conformación de estos grupos, aunque no aleatoria, es similar en estructura a la empleada en otros estudios cuasi-experimentales contemporáneos en educación matemática, como el de Costelnock (2024), lo que sitúa la investigación dentro de las prácticas metodológicas aceptadas en el campo.

Las variables del estudio fueron definidas con claridad. La Variable Independiente (V.I.) fue la aplicación del programa LECOP, conceptualizado como el tratamiento experimental cuyas fases y herramientas fueron descritas en el Capítulo 2 de este libro. La Variable Dependiente (V.D.) fue el “nivel del lenguaje científico de la matemática”, operativizada a través del dominio de las unidades de base, suplementarias y derivadas del Sistema Internacional. Para medir esta variable, se diseñaron y validaron dos instrumentos principales: un cuestionario de preprueba y un cuestionario de posprueba. Estos instrumentos, aplicados a ambos grupos antes y después del período de intervención, permitieron recoger los datos cuantitativos necesarios para evaluar el cambio en el desempeño. La utilización de medidas pre-tratamiento es una

característica fundamental de este diseño, ya que permite, como señalan Ato et al. (2019), verificar la equivalencia inicial de los grupos y controlar estadísticamente cualquier diferencia preexistente, fortaleciendo así la validez interna de las conclusiones.

La rigurosidad del proceso metodológico se complementó con procedimientos claros para la recolección y el análisis de datos. Los instrumentos fueron administrados en condiciones estandarizadas para ambos grupos. Una vez recogidos los datos, se procedió a un análisis estadístico que incluyó tanto estadística descriptiva (medias, desviaciones estándar) como inferencial. La prueba de hipótesis se realizó utilizando la distribución normal para la diferencia de medias, un procedimiento adecuado dado el tamaño de las muestras. La elección de este tipo de análisis es coherente con la práctica en la investigación cuasi-experimental, que a menudo emplea técnicas como el ANCOVA para comparar los grupos en el posttest, utilizando los resultados del pretest como covariable para ajustar las diferencias iniciales (Costelnock, 2024). Este enfoque metodológico, que combina un diseño cuasi-experimental con instrumentación validada y un análisis estadístico apropiado, proporciona un marco sólido para la evaluación del impacto del programa. Estudios más avanzados, como el de Reiter et al. (2025), utilizan diseños longitudinales con múltiples puntos de medición, lo que representa una posible vía para futuras investigaciones que busquen evaluar la sostenibilidad a largo plazo de los efectos de LECOP. Sin embargo, para los propósitos de este estudio de caso, el diseño pre-post con grupo de control ofrece una base de evidencia empírica clara y creíble, cuyos resultados se detallarán en el siguiente apartado.

4.3. Hallazgos

Esta sección se dedica a la presentación sistemática y objetiva de los resultados cuantitativos derivados de la investigación de Cámara Acero et al. (2022). El propósito es reportar de manera clara los datos obtenidos en las distintas fases de medición, estableciendo una narrativa factual que

sirva como base empírica para la posterior discusión. La exposición de los hallazgos se organiza de manera secuencial, comenzando por los resultados de la preprueba para establecer la línea base, seguido por los datos de la posprueba que evidencian el efecto de la intervención, y culminando con el análisis comparativo y la prueba de hipótesis formal.

4.3.1. Resultados de la Preprueba: Línea Base de Conocimiento

El análisis inicial, basado en la preprueba administrada a ambos grupos, constató un nivel de conocimiento homogéneo y bajo respecto al lenguaje científico de la matemática. En la dimensión de Unidades de Base, los resultados mostraron que una abrumadora mayoría de los estudiantes, tanto del Grupo Experimental (GE) como del Grupo de Control (GC), se ubicaba en la categoría más baja de rendimiento, denominada “En Inicio”.

A continuación, se presenta la tabla 5 que detalla esta distribución.

Tabla 5 Estrategias prácticas de andamiaje para el docente como mediador semiótico

ESCALA DE CALIFICACIÓN		PRE PRUEBA			
		G.E.		G.C.	
Literal	Numérica	fi	%	fi	%
En Inicio	[00 - 10]	42	70	49	75
En Proceso	[11 - 13]	18	30	16	25
Logro Previsto	[14 - 17]	0	0	0	0
Logro Destacado	[18 - 20]	0	0	0	0
TOTAL		60	100	65	100

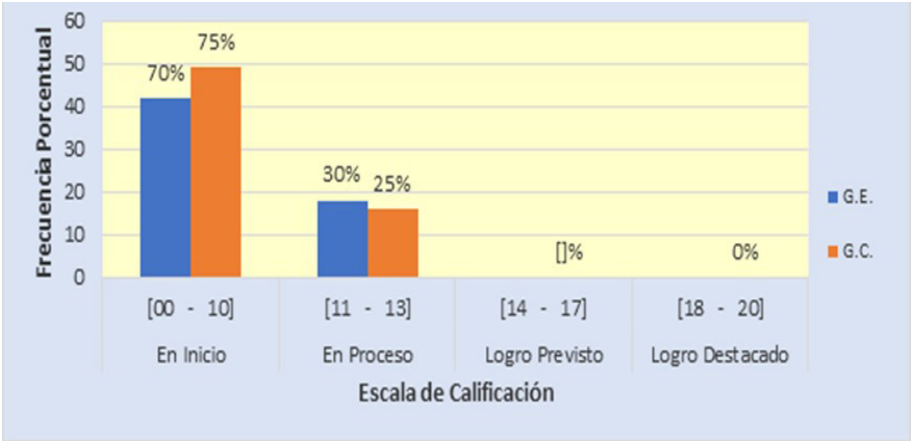
LLAMADA : Los datos están expresados en el sistema vigesimal

FUENTE : Cuadro N° 03

ELABORACIÓN : Tesista

La representación visual de estos datos confirma la similitud entre ambos grupos antes de la intervención.

Figura 2 Preprueba Respecto a las Unidades de Base Grupo Experimental y Control



Fuente: Elaboración propia

Esta tendencia de bajo rendimiento inicial se replicó consistentemente en las otras dos dimensiones evaluadas. Para las Unidades Suplementarias, los datos se detallan en el cuadro correspondiente.

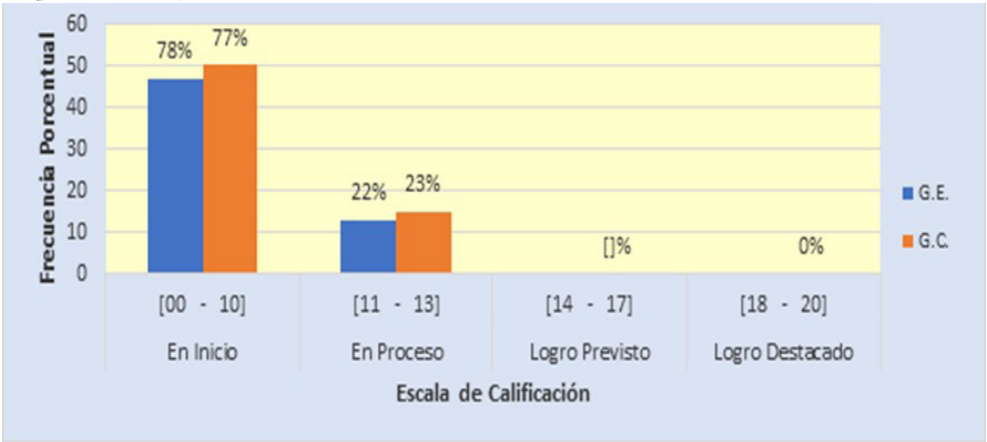
Tabla 6 Resultados de la preprueba respecto a las unidades suplementarias de los grupos control y experimental.

ESCALA DE CALIFICACIÓN		PRE PRUEBA			
		G.E.		G.C.	
Literal	Numérica	fi	%	fi	%
En Inicio	[00 - 10]	47	78	50	77
En Proceso	[11 - 13]	13	22	15	23
Logro Previsto	[14 - 17]	0	0	0	0
Logro Destacado	[18 - 20]	0	0	0	0
TOTAL		60	100	65	100

LLAMADA : Los datos están expresados en el sistema vigesimal
FUENTE : Cuadro N° 03
ELABORACIÓN : Tesista

La visualización gráfica de estos porcentajes reitera la falta de diferencias significativas entre los grupos en esta dimensión.

Figura 3 Preprueba Respecto a las Unidades Suplementarias Grupo Experimental y Control.



Fuente: Elaboración propia

Finalmente, la evaluación de las Unidades Derivadas completó el diagnóstico inicial, mostrando un panorama similar, tal como se expone en el siguiente cuadro.

Tabla 7 Resultados de la preprueba respecto a las unidades suplementarias de los grupos control y experimental.

ESCALA DE CALIFICACIÓN		PRE PRUEBA			
		G.E.		G.C.	
Literal	Numérica	fi	%	fi	%
En Inicio	[00 - 10]	47	78	50	77
En Proceso	[11 - 13]	13	22	15	23
Logro Previsto	[14 - 17]	0	0	0	0
Logro Destacado	[18 - 20]	0	0	0	0
TOTAL		60	100	65	100

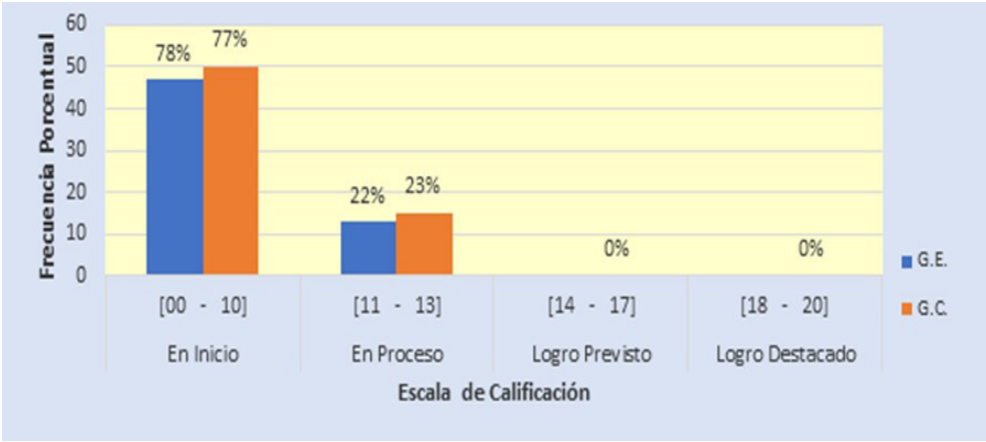
LLAMADA : Los datos están expresados en el sistema vigesimal

FUENTE : Cuadro N° 03

ELABORACIÓN : Tesista

El gráfico correspondiente a esta última dimensión corrobora el punto de partida equivalente para ambos grupos.

Figura 4 Preprueba Respecto a las Unidades Derivadas Grupo Experimental y Control.



Fuente: Elaboración propia

En conjunto, los datos de la preprueba establecen de manera concluyente una línea base de conocimiento deficiente y homogénea en ambos grupos, condición esencial para una evaluación válida del impacto diferencial del programa LECOP.

4.3.2. Resultados de la Posprueba: Evidencia del Cambio

Tras la implementación de la intervención, los resultados de la posprueba revelaron una divergencia notable y estadísticamente relevante entre el Grupo Experimental y el Grupo de Control. El GE mostró una mejora sustancial en todas las dimensiones, mientras que el GC permaneció en gran medida en su estado inicial.

En la dimensión de Unidades de Base, se observó el cambio más drástico, cuyos datos se detallan a continuación.

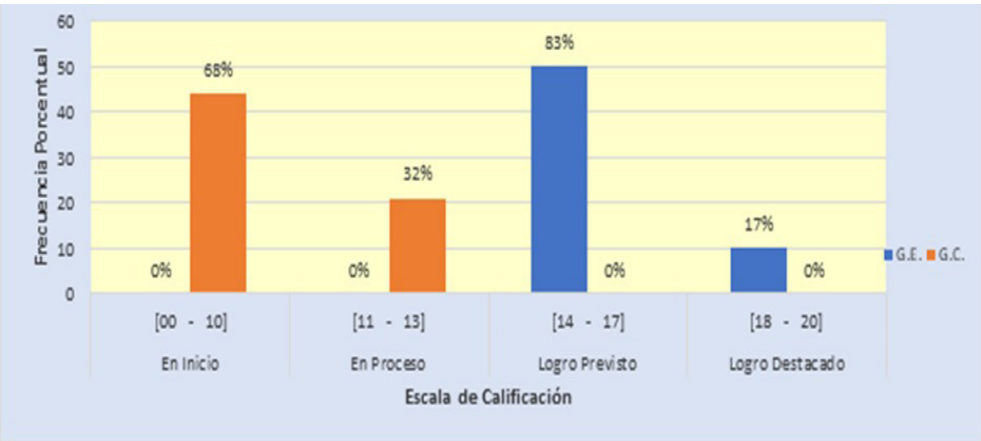
Tabla 8 Resultados de la posprueba respecto a las unidades de base de los grupos control y experimental.

ESCALA DE CALIFICACIÓN		POS PRUEBA			
		G.E.		G.C.	
Literal	Numérica	fi	%	fi	%
En Inicio	[00 - 10]	0	0	44	68
En Proceso	[11 - 13]	0	0	21	32
Logro Previsto	[14 - 17]	50	83	0	0
Logro Destacado	[18 - 20]	10	17	0	0
TOTAL		60	100	65	100

LLAMADA : Los datos están expresados en el sistema vigesimal
FUENTE : Cuadro N° 03

La representación gráfica de estos resultados permite visualizar de manera inmediata la brecha generada entre los dos grupos.

Figura 5 Posprueba Respecto a las Unidades de Base Grupo Experimental y Control.



Fuente: Elaboración propia

Un patrón de mejora análogo se constató en la dimensión de Unidades Suplementarias, donde el Grupo Experimental también exhibió un avance significativo.

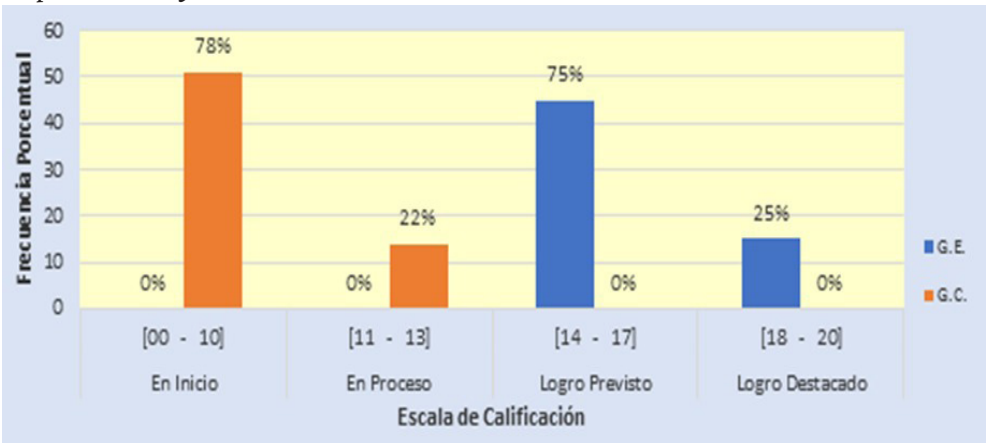
Tabla 9 Resultados de la posprueba respecto a las unidades suplementarias de los grupos control y experimental.

ESCALA DE CALIFICACIÓN		POS PRUEBA			
		G.E.		G.C.	
Literal	Numérica	fi	%	fi	%
En Inicio	[00 - 10]	0	0	51	78
En Proceso	[11 - 13]	0	0	14	22
Logro Previsto	[14 - 17]	45	75	0	0
Logro Destacado	[18 - 20]	15	25	0	0
TOTAL		60	100	65	100

LLAMADA : Los datos están expresados en el sistema vigesimal
FUENTE : Cuadro N° 03
ELABORACIÓN : Tesista

El contraste visual de este progreso se evidencia en la figura correspondiente.

Figura 6 Posprueba Respecto a las Unidades Suplementarias Grupo Experimental y Control.



Fuente: Elaboración propia

La tendencia se consolidó con los resultados de las Unidades Derivadas, donde el Grupo Experimental nuevamente demostró un progreso marcado en comparación con la inmovilidad del Grupo de Control.

Tabla 10 Resultados de la posprueba respecto a las unidades derivadas de los grupos control y experimental

ESCALA DE CALIFICACIÓN		POS PRUEBA			
		G.E.		G.C.	
Literal	Numérica	f _i	%	f _i	%
En Inicio	[00 - 10]	0	0	51	78
En Proceso	[11 - 13]	0	0	14	22
Logro Previsto	[14 - 17]	45	75	0	0
Logro Destacado	[18 - 20]	15	25	0	0
TOTAL		60	100	65	100

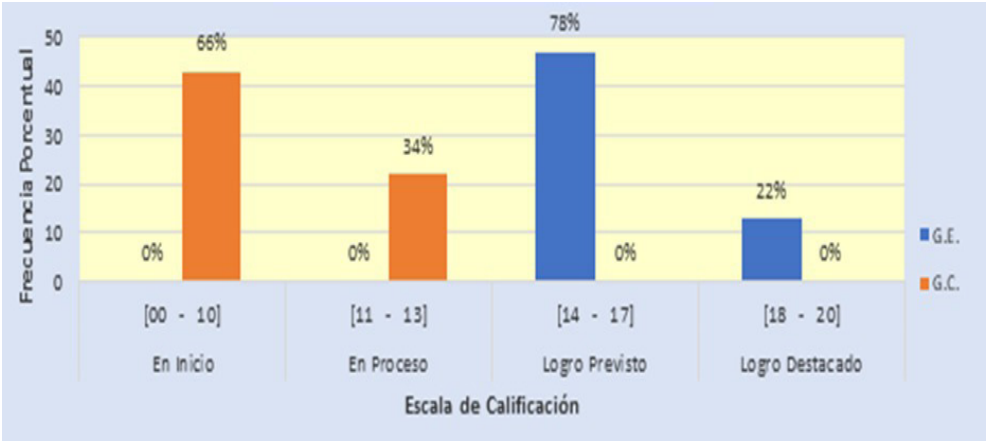
LLAMADA : Los datos están expresados en el sistema vigesimal

FUENTE : Cuadro N° 03

ELABORACIÓN : Tesista

La figura final de esta serie de mediciones ilustra el efecto de la intervención en la última dimensión.

Figura 7 Posprueba Respecto a las Unidades Derivadas Grupo Experimental y Control.



Fuente: Elaboración propia

4.3.3. Análisis Comparativo de Estadígrafos y Prueba de Hipótesis

Para una síntesis cuantitativa del efecto global, la investigación presenta una tabla comparativa de los principales estadígrafos descriptivos para ambos grupos en los dos momentos de medición.

Tabla 11 Análisis descriptivo de los estadígrafos en los grupos experimental y control según resultados de la preprueba y posprueba.

ESTADÍGRA-FOS	GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO CONTROL	
	PREPRUEBA	POSPRUEBA	PREPRUEBA	POSPRUEBA
Media	10	16	10	10
Mediana	10	16	10	10
Moda	10	16	10	10
Desviación es-tándar	1,3	1,3	1,3	1,2
Varianza	1,7	1,7	1,8	1,5
Coefficiente de asimetría	-0,348	0,379	-0,264	-0,475

Mínimo	8	14	8	8
Máximo	12	18	12	12
Muestra (n)	60	60	65	65

FUENTE : Cuadros 03

ELABORACIÓN : Investigador

Este cuadro concentra el hallazgo central del estudio: la media de calificaciones del Grupo Experimental se incrementó de 10 a 16 puntos, mientras que la del Grupo de Control se mantuvo en 10. La prueba de hipótesis formal, realizada para determinar la significancia estadística de esta diferencia, arrojó un valor $Z = 26$. Este valor, al ser comparado con el valor crítico de $Z_c = 1.96$ para un nivel de confianza del 95%, se situó claramente en la zona de rechazo. Este resultado condujo a descartar la hipótesis nula, proporcionando así evidencia estadística suficiente para afirmar el efecto significativo del programa LECOP.

4.4. Discusión y conclusiones

Una vez presentados los hallazgos cuantitativos de la investigación de Cámara Acero et al. (2022), esta sección final del capítulo se dedica a interpretar el significado de dichos resultados, dotándolos de un contexto teórico y pedagógico. Si el apartado anterior se centró en el “qué” de los datos, este se enfocará en el “porqué” de su significancia, conectando la evidencia empírica con las hipótesis planteadas y con el marco conceptual más amplio de este libro. La discusión se estructurará en torno a la confirmación de la efectividad del programa LECOP, la contrastación de estos resultados con las teorías del aprendizaje que lo sustentan, y la formulación de las conclusiones específicas que se derivan de este estudio de caso, cerrando así el ciclo argumentativo de este capítulo.

La primera y más contundente interpretación de los resultados es la confirmación de la hipótesis general del estudio. Los datos expuestos en el apartado 4.3 muestran una diferencia abrumadora y estadísticamente irrefutable entre el Grupo Experimental y el Grupo de Control. El valor Z calculado de 26, que excede masivamente el umbral crítico de 1.96, no deja lugar a dudas sobre la eficacia de la intervención. Este resultado permite, con un altísimo grado de confianza, rechazar la hipótesis nula — que postulaba que el programa LECOP no mejoraría significativamente el nivel del lenguaje científico de la matemática— y, en consecuencia, aceptar la hipótesis alterna. La evidencia empírica de este estudio de caso particular, por tanto, demuestra de manera concluyente que la aplicación del programa LECOP tuvo un efecto positivo y de gran magnitud en la competencia de los estudiantes universitarios de ciencias sociales y humanidades para comprender y utilizar el lenguaje matemático. La mejora sustancial en el rendimiento, reflejada en el paso de una media de 10 a 16 puntos en el Grupo Experimental frente a la inmovilidad del Grupo de Control, valida el programa no solo como una propuesta teórica plausible, sino como una herramienta pedagógica de impacto probado en un entorno real.

Prosiguiendo con la interpretación, es fundamental contrastar estos resultados con los referentes teóricos que sustentan el modelo LECOP, tal como se delineó en el apartado 2.1.1. La mejora observada no puede atribuirse a un simple efecto de la práctica o a la memorización, sino que debe entenderse como el resultado de los procesos de aprendizaje activo promovidos por el programa. La investigación de Cámara Acero et al. (2022) interpreta esta mejora a la luz de las teorías constructivistas. Desde la perspectiva de Piaget, la efectividad del programa reside en que facilita un proceso de asimilación y acomodación del nuevo conocimiento lingüístico-matemático, donde el estudiante es el protagonista de la construcción de sus propias estructuras cognitivas. Sin embargo, es la lente de la teoría sociocultural de Vygotsky la que ofrece una explicación más completa. El éxito de LECOP se puede interpretar como el resultado de una mediación semiótica efectiva, donde el programa y el docente actúan como

herramientas que guían al estudiante a través de su Zona de Desarrollo Próximo. La mejora en el rendimiento no es solo un logro individual, sino el producto de una actividad socialmente mediada, donde la interacción con el texto, con los pares y con el docente (tal como se describió en la sección 2.3) facilita la internalización de las complejas reglas del lenguaje matemático. La efectividad de este tipo de intervenciones estructuradas, especialmente en poblaciones con dificultades iniciales, encuentra eco en estudios como el de Trias et al. (2021), que demuestran cómo la enseñanza explícita de estrategias de autorregulación y metacognición mejora significativamente el desempeño matemático.

Finalmente, a partir de esta discusión, se pueden extraer las conclusiones específicas y el aporte científico de este estudio de caso. La investigación de Cámara Acero et al. (2022) aporta evidencia empírica robusta y contextualizada sobre la efectividad del programa LECOP para mejorar la competencia en el lenguaje científico de la matemática en una población universitaria específica. Demuestra que es posible diseñar e implementar intervenciones pedagógicas que aborden de manera exitosa las dificultades de “traducción” semiótica que enfrentan los estudiantes. Los resultados del estudio sugieren que el feedback implícito en el ciclo de LECOP (lectura, traducción, escritura, revisión) funciona como un mecanismo de retroalimentación formativa. Como señala la revisión de Söderström y Palm (2024), el feedback más efectivo en matemáticas es aquel que es específico, oportuno y que ayuda a los estudiantes a construir conexiones conceptuales, características inherentes al proceso de LECOP. Por tanto, las conclusiones que se derivan de este análisis son:

1. La aplicación del programa LECOP mejora de manera significativa el nivel de unificación del lenguaje científico de la matemática concerniente a las unidades de base, suplementarias y derivadas en estudiantes universitarios de ciencias sociales y humanidades.

2. La utilización del programa LECOP favorece el desarrollo del lenguaje científico de la matemática, mostrando indicadores positivos y de crecimiento en el grupo experimental con respecto al grupo de control.
3. El estudio proporciona una base empírica sólida que valida el uso de un enfoque pedagógico centrado en la lectura, la traducción y la escritura como una estrategia efectiva para la enseñanza de las matemáticas.

En suma, este estudio de caso no solo confirma la viabilidad y eficacia del modelo LECOP, sino que también cierra el ciclo argumentativo de los capítulos centrales de este libro. Conecta el diagnóstico del problema del lenguaje (Capítulo 1) con la propuesta de solución (Capítulo 2) a través de una validación empírica concreta, reforzando las proyecciones sobre el potencial transformador de este enfoque, como se adelantó en el apartado 3.3. La función de este capítulo ha sido, por tanto, la de anclar la discusión teórica en una realidad tangible, demostrando que la humanización de la enseñanza de las matemáticas es un objetivo alcanzable a través de intervenciones pedagógicas rigurosas y bien fundamentadas.

REFLEXIONES FINALES

Al llegar a la culminación de este recorrido intelectual, es momento de sintetizar el hilo argumental que ha guiado nuestra indagación y de reflexionar sobre sus implicaciones más profundas. Partimos de un diagnóstico que buscaba desvelar la naturaleza de las dificultades en el aprendizaje matemático, proponiendo un cambio de paradigma: abandonar la visión de las matemáticas como un mero conjunto de procedimientos para abrazar su concepción como un lenguaje complejo, dotado de un sistema semiótico propio. Este marco teórico, desarrollado en el primer capítulo, nos permitió identificar que las barreras que enfrentan los estudiantes universitarios no son solo cognitivas, sino también epistemológicas y afectivas, originadas en la fricción entre el discurso matemático y el lenguaje natural. Frente a este diagnóstico, el segundo capítulo articuló una propuesta pedagógica, el programa LECOP, fundamentado en la idea de que la resolución de problemas es un acto de traducción y comunicación. Subsiguientemente, el tercer capítulo se dedicó a la validación empírica de este modelo, presentando evidencias cualitativas y cuantitativas de su impacto. Finalmente, el cuarto capítulo ancló toda la discusión en un estudio de caso concreto, ilustrando la aplicación y eficacia de LECOP en un entorno universitario real. Este viaje, desde la teoría del problema hasta la prueba de la solución, nos permite ahora extraer conclusiones integradoras y proyectar nuevos horizontes para la investigación y la práctica educativa.

La contribución principal de esta obra reside en la demostración de que un enfoque semiótico-lingüístico no es simplemente una lente teórica para analizar el aprendizaje, sino una base pragmática y extraordinariamente fértil para el diseño de intervenciones pedagógicas efectivas. Los hallazgos

presentados a lo largo de los capítulos constatan que cuando se enseña a los estudiantes a abordar la matemática como un lenguaje —aplicando estrategias explícitas de lectura crítica, traducción entre registros y escritura argumentativa—, los resultados trascienden la mera mejora en el rendimiento académico. La evidencia sugiere una conexión causal robusta: el fortalecimiento de la competencia en el lenguaje matemático actúa como un catalizador para la mitigación de las barreras afectivas. Al proporcionar a los estudiantes un método sistemático para decodificar lo que antes parecía un código incomprensible, el programa LECOP parece dismantelar la base misma de la ansiedad matemática y fomenta la construcción de una autoeficacia sólida, una creencia que, como evidencia la investigación de Street et al. (2024), se nutre de las experiencias de dominio progresivo. En este sentido, el programa no solo enseña a resolver problemas, sino que transforma la identidad del aprendiz, guiándolo desde una autopercepción de incapacidad hacia la de un agente competente y autónomo en la construcción de su propio conocimiento.

Derivado de lo anterior, una segunda conclusión fundamental es la validación del rol del docente como un mediador semiótico. La eficacia del programa LECOP, como se ha argumentado, no reside en un guion auto-ejecutable, sino en la intervención experta de un educador que comprende su función como facilitador de la construcción de significado. Este trabajo ha evidenciado que el conocimiento didáctico requerido para este rol es altamente especializado, implicando no solo un dominio del contenido matemático, sino una comprensión profunda de los procesos cognitivos y semióticos del aprendizaje, tal como lo postula la investigación de Díaz (2025). El docente mediador debe ser un intérprete de los signos del estudiante, un arquitecto de puentes entre el lenguaje natural y el formal, y un gestor estratégico del feedback, como lo describe la literatura sobre el tema (Granone & Pollarolo, 2025). Por lo tanto, la implementación exitosa de pedagogías transformadoras como LECOP implica necesariamente una inversión en la formación y el desarrollo profesional docente, equipándolos con las competencias para asumir este rol crucial.

Las implicaciones de estos hallazgos se extienden a múltiples niveles del ecosistema educativo. Para los educadores, este libro ofrece un marco conceptual y un conjunto de herramientas prácticas para repensar su pedagogía, no solo en matemáticas, sino en cualquier disciplina científica que dependa de un lenguaje técnico especializado. Para los diseñadores de currículo, el trabajo subraya la necesidad de integrar la alfabetización en el lenguaje científico como una competencia transversal fundamental, en lugar de asumirla como un prerrequisito implícito. Para las instituciones de educación superior, los resultados plantean un llamado a fomentar culturas de enseñanza que prioricen la comprensión profunda sobre la memorización superficial, reconociendo que el bienestar emocional y la autoeficacia de los estudiantes son condiciones indispensables para el aprendizaje riguroso. Este enfoque se alinea con las visiones más contemporáneas de la alfabetización científica, que la conciben no solo como la adquisición de conocimientos, sino como el desarrollo de la agencia para la participación crítica en una sociedad tecnológicamente compleja (Sjöström & Eilks, 2021).

No obstante, toda investigación tiene sus fronteras, y es académicamente honesto reconocer las limitaciones de este trabajo para, a partir de ellas, proponer una agenda de investigación futura. El estudio de caso central, si bien riguroso, se circunscribe a un contexto y una población específicos. La validación empírica, aunque robusta, es de naturaleza transversal. Estas limitaciones, lejos de ser un demérito, iluminan los caminos que la investigación futura debería explorar. En primer lugar, se hace necesaria la replicación y adaptación del modelo LECOP en una diversidad de contextos disciplinares (como la ingeniería, la biología o la economía, campos donde el lenguaje matemático es igualmente crucial) y en diferentes niveles educativos. Este tipo de estudios permitiría evaluar la generalizabilidad del modelo y refinar sus componentes para distintas poblaciones estudiantiles.

En segundo lugar, es imperativo el desarrollo de estudios longitudinales. Si bien la evidencia presentada demuestra un impacto significativo a corto plazo, la investigación futura debería rastrear a los estudiantes que han participado en el programa a lo largo de su carrera universitaria y más allá. ¿Se mantiene la mejora en el rendimiento y la autoeficacia a lo largo del tiempo? ¿Se transfiere la mejora en el pensamiento crítico y la capacidad de argumentación a otras asignaturas? ¿Influye la participación en el programa en las decisiones de carrera o en la persistencia en campos STEM? Solo un diseño longitudinal puede responder a estas preguntas sobre la sostenibilidad y la transferencia a largo plazo de las competencias adquiridas, siguiendo metodologías avanzadas como las propuestas por Reiter et al. (2025).

Finalmente, una tercera línea de investigación, particularmente relevante en la era digital, es la exploración de la adaptación y la implementación de LECOP en entornos de aprendizaje virtuales y mixtos. Sería de gran valor investigar cómo las herramientas tecnológicas pueden ser diseñadas para apoyar cada una de las fases del ciclo LECOP. ¿Puede una plataforma interactiva guiar eficazmente la lectura crítica? ¿Qué herramientas de visualización digital pueden potenciar la fase de traducción semiótica? ¿Cómo se puede gestionar el feedback sobre la escritura explicativa en un entorno en línea? La investigación sobre el uso de la tecnología para reducir la ansiedad matemática (Ersozlu, 2024) sugiere que este es un campo prometedor. La creación y validación de una versión digital de LECOP no solo ampliaría su alcance, sino que también ofrecería nuevas posibilidades para la personalización del aprendizaje y la recopilación de datos a gran escala sobre los procesos cognitivos de los estudiantes. En conclusión, este libro ha buscado ofrecer no un punto final, sino un punto de partida: un diagnóstico, una solución validada y, sobre todo, una invitación a la comunidad académica a continuar explorando el poder del lenguaje como la clave para una educación científica más efectiva, inclusiva y profundamente humana.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ato, M., López, J., & Benavente, A. (2019). *Diseños cuasi-experimentales y longitudinales*. Repositorio Digital de la Universidad de Barcelona. <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/30783/1/D.%20cuasi%20y%20longitudinales.pdf>
- Barete, M., & Taja-on, E. (2024). Students' perception in learning the course mathematics in the modern world: A qualitative study. *International Journal of Multidisciplinary Research*, 6(3), 45-62. https://www.researchgate.net/profile/Evan-Taja-On/publication/382365824_Students'_Perception_in_Learning_the_Course_Mathematics_in_the_Modern_World_A_Qualitative_Study/links/669a036a4a172d2988ad57d8/Students-Perception-in-Learning-the-Course-Mathematics-in-the-Modern-World-A-Qualitative-Study.pdf
- Bekene, T., & Machaba, M. (2024). The development of the cycle model and its effect on mathematics learning using GeoGebra mathematical software. *Education Inquiry*, 15(4), 503-526. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/20004508.2022.2137260>

- Bjälkebring, P. (2019). Math anxiety at the university: what forms of teaching and learning statistics in higher education can help students with math anxiety? *Frontiers in Education*, 4, 30. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/feduc.2019.00030/full>
- Burgos, M., Castillo, M., Beltrán, P., Giacomone, B., & Godino, J. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 132-156. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/4cQYcXNMj4dStdXJMDtdZWJ/>
- Caserio, M., & Vozzi, A. (2015). El impacto del lenguaje matemático en el aprendizaje: Una experiencia con alumnos del nivel superior. En *Actas de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1-10). <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/el-impacto-del-lenguaje-matematico-en-el-aprendizaje-una-experiencia-con-alumnos-del-nivel-superior/>
- Chkana, Y., Martynenko, O., Yurchenko, A., & Saenko, V. (2025). A bibliometric exploration of research in mathematics education (2020–2024). *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(7), em2659. <https://www.ejmste.com/article/a-bibliometric-exploration-of-research-in-mathematics-education-2020-2024-16561>
- Costelnock, J. (2024). *A quasi-experimental study on the effects of small group learning on mathematical resilience in fifth grade students* [Disertación doctoral, Liberty University]. Liberty University Digital Commons. <https://digitalcommons.liberty.edu/doctoral/5868/>

- Czerwinski, A. (2024). Mathematics serving economics: a historical review of mathematical methods in economics. *Symmetry*, 16(10), 1271. https://www.researchgate.net/profile/Artur-Czerwinski-2/publication/384356841-Mathematics_Serving_Economics_A_Historical_Review_of_Mathematical_Methods_in_Economics/links/66f5831c906bca2ac3cf77fa/Mathematics-Serving-Economics-A-Historical-Review-of-Mathematical-Methods-in-Economics.pdf
- Das, K. (2020). Realistic Mathematics & Vygotsky's Theories in Mathematics Education. *Shanlax International Journal of Education*, 9(1), 104-108. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1278172>
- Díaz, D. (2025). *Constructos teóricos sobre el conocimiento didáctico matemático de los docentes en torno al manejo de los registros semióticos en la enseñanza de las inecuaciones* [Tesis doctoral, Universidad Pedagógica Experimental Libertador]. Repositorio UPEL. <http://espacio.digital.upel.edu.ve/index.php/TD/article/view/1978>
- Ersozlu, Z. (2024). The role of technology in reducing mathematics anxiety in primary school students. *Contemporary Educational Technology*, 16(3), ep517. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1437497>
- Espinas, D., & Fuchs, L. (2022). The Effects of Language Instruction on Math Development. *Child Development Perspectives*, 16(2), 69-75. <https://srcd.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/cdep.12444>
- Espinoza, J., Osorio, K., & Padilla, J. (2024). Asociaciones entre autoeficacia, dominio e interés en la tecnología y las matemáticas de estudiantes universitarios colombianos. *Formación Universitaria*, 17(1), 59-68. https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-50062024000100059&script=sci_arttext&tlng=en

- Godino, J. (2024). *Ontosemiotic approach in mathematics education. Foundations, tools, and applications*. DIGIBUG Author edition. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/93738>
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37-42. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Godino, J., Batanero, C., Burgos, M., & Wilhelmi, M. (2024). Understanding the onto-semiotic approach in mathematics education through the lens of the cultural historical activity theory. *ZDM – Mathematics Education*. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-024-01590-y>
- Granone, F., & Pollarolo, E. (2025). Facilitating children's communication in problem-solving activities with a coding toy: teachers' semiotic mediation in early childhood education and care. *Frontiers in Psychology*, 15, 1426165. <https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2024.1426165/full>
- Hidalgo, E., & Aveiga, E. (2025). Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos: una revisión sistemática. *Sapientiae*, 10(1), 45-67. <https://publicacionescd.uleam.edu.ec/index.php/sapientiae/article/view/1390>
- Jungck, J., Robeva, R., & Gross, L. (2020). Mathematical biology education: Changes, communities, connections, and challenges. *Bulletin of Mathematical Biology*, 82(9), 117. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11538-020-00793-0>

- Klang, N., Karlsson, N., Kilborn, W., Eriksson, P., & Karlberg, M. (2021). Mathematical Problem-Solving Through Cooperative Learning—The Importance of Peer Acceptance and Friendships. *Frontiers in Education*, 6, 710296. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/feduc.2021.710296/full>
- Lerman, S. (Ed.). (2020). *Encyclopedia of mathematics education*. Springer International Publishing. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-15789-0_300003.pdf
- Leron, U., & Hazzan, O. (2022). On the Evolution of Languages: Natural, Mathematical, and Computational. *Communications of the ACM*. <https://cacm.acm.org/blogcacm/on-the-evolution-of-languages-natural-mathematical-and-computational/>
- Li, Y., & Schoenfeld, A. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International Journal of STEM Education*, 6(1), 44. <https://link.springer.com/article/10.1186/s40594-019-0197-9>
- Luong, P. (2022). Applying the concepts of “community” and “social interaction” from Vygotsky’s sociocultural theory of cognitive development in math teaching to develop learner’s math skills. *Vietnam Journal of Education*, 6(3), 209-215. <https://vje.vn/index.php/journal/article/view/243>
- Manolino, C. (2024). Cultural semiotics for mathematical discourses. *Semiotica*, 2024(259), 61-77. <https://www.degruyterbrill.com/document/doi/10.1515/sem-2023-0030/html>
- Mantilla, J. (2024). *Estrategia didáctica para el fortalecimiento de la comprensión de enunciados matemáticos en los estudiantes de 3° de la institución educativa Pablo Correa León* [Tesis de maestría, Universidad Francisco de Paula]

Santander]. Repositorio UFPS. <https://repositorio.ufps.edu.co/handle/ufps/9484>

Morán, N., Zavala, D., Chila, G., & Tuárez, H. (2024). Estrategia metodológica de aprendizaje significativo para el desarrollo de la habilidad resolver problemas en la asignatura metodología de las matemáticas. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 8(4), 3251-3279. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9784016>

Öztürk, M., Akkan, Y., & Kaplan, A. (2020). Reading comprehension, Mathematics self-efficacy perception, and Mathematics attitude as correlates of students' non-routine Mathematics problem-solving skills in Turkey. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1042-1058. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2019.1648893>

Pepin, B., Biehler, R., & Gueudet, G. (2021). Mathematics in engineering education: A review of the recent literature with a view towards innovative practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(2), 163-188. <https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-021-00139-8>

Pérez, P., Monje, J., & Castro, E. (2023). Actitud, autoeficacia y ansiedad matemática en estudiantes de colegios españoles: Un estudio comparativo. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 16(2), 125-142. <https://rieec.um.edu.mx/index.php/RIEE/article/view/361>

Planas, N., & Pimm, D. (2024). Mathematics education research on language and on communication including some distinctions: Where are we now? *ZDM-Mathematics Education*, 56(1), 45-58. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-023-01497-0>

- Presmeg, N., & Kaiser, G. (Eds.). (2019). *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*. Springer. <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/23016>
- Radford, L., & Presmeg, N. (2022). Introduction: What Is Semiotics and Why Is It Important for Mathematics Education? *Journal of Mathematics Education*, 15(2), 45-60. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-31370-2_1
- Rahman, L. (2024). Vygotsky's Zone of Proximal Development of Teaching and Learning in STEM Education. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 13(8), 1234-1245. https://www.researchgate.net/profile/Latifa-Rahman-Bidita/publication/383400353_Vygotsky's_Zone_of_Proximal_Development_of_Teaching_and_Learning_in_STEM_Education/links/66cb1f94c2eaa5002315fbbf/Vygotskys-Zone-of-Proximal-Development-of-Teaching-and-Learning-in-STEM-Education.pdf
- Rakes, C., Wesneski, A., & Laws, R. (2023). Building Mathematics Learning through Inquiry Using Student-Generated Data: Lessons Learned from Plan-Do-Study-Act Cycles. *Education Sciences*, 13(9), 919. <https://www.mdpi.com/2227-7102/13/9/919>
- Ramírez, D. (2024). *Teoría de los Registros de Representación Semiótica y la Modelización Matemática en los Estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga – Ayacucho* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle]. Repositorio UNE. <https://repositorio.une.edu.pe/entities/publication/add04f42-8755-4a24-8b2a-73639356f2ad>

- Reiter, P., Schons, C., Mühling, A., Prestridge, S., & Narciss, S. (2025). Transforming formal knowledge to language and graphs to promote mathematics learning: A repeated-measures mixed design quasi-experiment. *Computers & Education*, 222, 105557. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2451958825000557>
- Rizo, I. (2024). *Mediación Didáctica de la Comprensión Lectora para la Resolución de Problemas Matemáticos* [Tesis de maestría, Universidad de la Costa]. Repositorio CUC. <https://repositorio.cuc.edu.co/server/api/core/bitstreams/c33595e8-e74b-49f2-9e03-53fa8277b9a7/content>
- Rozgonjuk, D., Kraav, T., Mikkor, K., Orav-Puurand, K., & Täht, K. (2020). Mathematics anxiety among STEM and social sciences students: the roles of mathematics self-efficacy, and deep and surface approach to learning. *International journal of STEM education*, 7(1), 46. <https://link.springer.com/article/10.1186/s40594-020-00246-z>
- Sammallahti, E., Finell, J., Jonsson, B., & Korhonen, J. (2023). A meta-analysis of math anxiety interventions. *The Journal of Educational Research*, 116(3), 167-181. <https://research.abo.fi/en/publications/a-meta-analysis-of-math-anxiety-interventions>
- Santos, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686-693). Springer International Publishing. https://link.springer.com/rwe/10.1007/978-3-030-15789-0_129
- Shahbari, J., & Tabach, M. (2019). Adopting the Modelling Cycle for Representing Prospective and Practising Teachers' Interpretations of Students' Modelling Activities. En G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 153-170). Springer. https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/41743/1/2019_

Book_LinesOfInquiryInMathematicalMo.pdf#page=186

- Shernoff, D., Sinha, S., Bressler, D., & Ginsburg, L. (2025). Adopting scientific literacy in early years from empirical studies on construction of scientific literacy: A systematic review. *International Journal of STEM Education*, 12(1), 1-22. <https://link.springer.com/article/10.1186/s40594-017-0068-1>
- Sinaga, M., Sinaga, B., & Napitupulu, E. (2021). Analysis of Students' Mathematical Communication Ability in the Application of Vygotsky's Theory at High School Level. *Budapest International Research and Critics in Linguistics and Education (BirLE) Journal*, 4(1), 1-10. <https://www.academia.edu/download/80385204/pdf.pdf>
- Sjöström, J., & Eilks, I. (2021). Scientific literacy and social transformation: A systematic theoretical analysis of the main visions of the concept of scientific literacy developed in the last 20 years. *Science & Education*, 30(4), 789-820. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sce.21949>
- Söderström, S., & Palm, T. (2024). Feedback in mathematics education research: a systematic literature review. *Research in Mathematics Education*, 1-22. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14794802.2024.2401488>
- Street, K., Malmberg, L., & Schukajlow, S. (2024). Students' mathematics self-efficacy: A scoping review. *ZDM—Mathematics Education*, 56(3), 487-504. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-024-01548-0>
- Tasquier, G., Knain, E., & Jornet, A. (2022). Scientific literacies for change making: Equipping the young to tackle current societal challenges. *Frontiers in Education*, 7, 689329. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/educ.2022.689329/full>

- Teledahl, A., Kilhamn, C., Ahl, L., & Helenius, O. (2024). Defining and measuring quality in students' mathematical writing: a systematic literature review. *Mathematics Education Research Journal*, 36(3), 547-574. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-024-00501-4>
- Trias, D., Mels, C., & Huertas, J. (2021). Teaching to Self-regulate in mathematics: A quasi-experimental study with low-achieving elementary school students. *Revista electrónica de investigación educativa*, 23. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1607-40412021000100002&script=sci_arttext&tlng=en
- Uzun, A. (2024). The development of mathematical argumentation: A case study on two mathematics classrooms. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(2), em0778. <https://www.iejme.com/article/the-development-of-mathematical-argumentation-a-case-study-on-two-mathematics-classrooms-14581>
- Valenzuela, J. (2024). *A multiple case study of college-contextualized mathematics curriculum within face-to-face environments*. ERIC Educational Resources Information Center, ED581241. <https://eric.ed.gov/?id=ED581241>
- Valverde, A. (2024). *La comprensión matemática, la representación semiótica y la interpretación en la modelación matemática de los estudiantes de pregrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Educación* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle]. Repositorio UNE. <https://repositorio.une.edu.pe/entities/publication/42c032e5-0771-4a8d-9688-08769265fc1a>
- Viseu, F., Pires, A., Menezes, L., & Costa, A. (2021). Semiotic representations in the learning of rational numbers by 2nd grade Portuguese students. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 13(5), 123-140. <https://>

repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/77549

- Wang, M., Mohd, M., & Rosli, R. (2025). A systematic literature review on analytical thinking development in mathematics education: Trends across time and countries. *Frontiers in Psychology*, 16, 1523836. <https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2025.1523836/abstract>
- Wang, Q., & Abdullah, A. (2024). Enhancing students' critical thinking through mathematics in higher education: A systematic review. *SAGE Open*, 14(3), 21582440241275651. <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/21582440241275651>
- Yang, Y., Maeda, Y., & Gentry, M. (2024). The relationship between mathematics self-efficacy and mathematics achievement: Multilevel analysis with NAEP 2019. *Large-Scale Assessments in Education*, 12(1), 1-25. <https://link.springer.com/article/10.1186/s40536-024-00204-z>
- Zhu, C., & Wu, X. (2023). A Study on Differential Effects of Mathematics Reading Ability on Students' Value-Added Mathematics Achievements. *Behavioral Sciences*, 13(9), 754. <https://www.mdpi.com/2076-328X/13/9/754>

